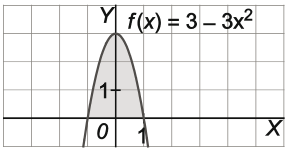
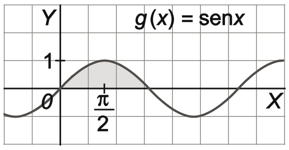
11 Integración

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Calcula el área de las regiones sombreadas.

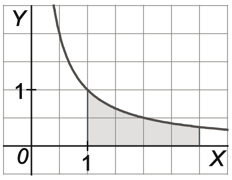
a) 

b) 

a) La función $F(x)=3x-x^3$ verifica $F'(x)=f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1)-F(-1)=2-(-2)=4\ \text{u}^2$.

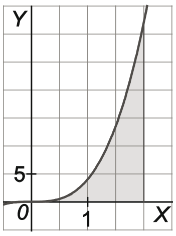
b) La función $G(x)=-\cos x$ verifica $G'(x)=g(x)$, por tanto, el área pedida es $G(\pi)-G(0)=1-(-1)=2\ \text{u}^2$.

3. Halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la curva $y=\dfrac{1}{x}$ y las rectas verticales $x=1$, $x=3$.



$F(x)=\ln x$ verifica $F'(x)=\dfrac{1}{x}$, por tanto, el área pedida es $F(3)-F(1)=\ln 3-\ln 1=\ln 3\ \text{u}^2$.

4. Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y=4x^3$, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.



$F(x)=x^4$ verifica $F'(x)=4x^3$, por tanto, el área pedida es $F(2)-F(0)=16-0=16\ \text{u}^2$.

5 a 8. Ejercicios resueltos.

9. Halla las primitivas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=2x^5-3x^3+2x-1$ **c)** $f(x)=\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$ **e)** $f(x)=3^x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ **g)** $f(x)=\sqrt[3]{x}-\cos x$

b) $f(x)=3x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ **d)** $f(x)=-3e^x$ **f)** $f(x)=5\,\text{sen}\,x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **h)** $f(x)=\frac{4}{1+x^2}-\frac{3\cos x}{5}$

a) $\int\left(2x^5-3x^3+2x-1\right)dx=\frac{x^6}{3}-\frac{3x^4}{4}+x^2-x+C$

b) $\int\left(3x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)dx=x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+C$

c) $\int\left(\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{x}{4}-1+3x^{-1}-2x^{-2}\right)dx=\frac{x^2}{8}-x+3\ln|x|-2\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{8}-x+3\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

d) $\int -3e^x\,dx=-3e^x+C$

e) $\int\left(3^x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(3^x-4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{3^x}{\ln 3}-8\sqrt{x}+C$

f) $\int\left(5\,\text{sen}\,x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=-5\cos x-\text{arcsen}\,x+C$

g) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\cos x\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}-\cos x\right)dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\text{sen}\,x+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\text{sen}\,x+C$

h) $\int\left(\frac{4}{1+x^2}-\frac{3\cos x}{5}\right)dx=4\,\text{arctg}\,x-\frac{3\,\text{sen}\,x}{5}+C$

10. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int\left(2x^4-3x^2+1\right)dx$ **c)** $\int\frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx$ **e)** $\int\left(\cos x-2^x+x^2\right)dx$

b) $\int\left(x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ **d)** $\int\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}\,dx$ **f)** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2e^x}{7}\right)dx$

a) $\int\left(2x^4-3x^2+1\right)dx=\frac{2x^5}{5}-x^3+x+C$

b) $\int\left(x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^3-x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$

c) $\int\frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x+2x^{-1}\right)dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C$

d) $\int\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}\,dx=\int x^{\frac{7}{6}}\,dx=\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}+C=\frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13}+C$

e) $\int\left(\cos x-2^x+x^2\right)dx=\text{sen}\,x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C$

f) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2e^x}{7}\right)dx=3\,\text{arcsen}\,x-\frac{2e^x}{7}+C$

11. Halla las primitivas de la función $f(x)=5+\operatorname{tg}^2 x+2\cos x$.

$$\int\left(5+\operatorname{tg}^2 x+2\cos x\right)dx=\int\left(4+1+\operatorname{tg}^2 x+2\cos x\right)dx=4x+\operatorname{tg} x+2\operatorname{sen} x+C$$

12. Ejercicio resuelto.

13. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}dt$ **c)** $\int (x^2+1)^{20}5x\,dx$ **e)** $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}ds$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}ds$ **d)** $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}dt$ **f)** $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}dt=\frac{1}{2}\int\left(t^2+2t+3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(t+1)dt=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+2t+3\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t^2+2t+3}+C$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}ds=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}}ds=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2s}\right)+C$

c) $\int (x^2+1)^{20}5x\,dx=\frac{5}{2}\int (x^2+1)^{20}2x\,dx=\frac{5}{2}\frac{(x^2+1)^{21}}{21}+C=\frac{5}{42}(x^2+1)^{21}+C$

d) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}dt=\int\cos(\ln t)\cdot\frac{1}{t}dt=\operatorname{sen}(\ln t)+C$

e) $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}ds=\int\frac{e^s}{1+\left(e^s\right)^2}ds=\operatorname{arctg} e^s+C$

f) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx=\operatorname{arcsen} x^2+C$

14. Halla las primitivas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\operatorname{sen} x\cos^4 x$ **b)** $f(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$ **c)** $f(x)=\operatorname{tg}(3x+2)$ **d)** $f(x)=\operatorname{cotg} x$

a) $\int \operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx=-\frac{\cos^5 x}{5}+C$

b) $\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx=\int\operatorname{sen}^{-3} x\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^{-2} x}{-2}+C=-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$

c) $\int\operatorname{tg}(3x+2)dx=\int\frac{\operatorname{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{-3\operatorname{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}dx=-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

d) $\int\operatorname{cotg} x\,dx=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx=\ln\left|\operatorname{sen} x\right|+C$

15. Ejercicio interactivo.

16. Ejercicio resuelto.

17. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx$ **b)** $\int_{0}^{1} \cos x\,dx$ **c)** $\int_{0}^{3} \left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx$ **d)** $\int_{-1}^{1} \left(4e^x-x\right)dx$

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$

b) $\int_{0}^{1}\cos x\,dx=\left[\operatorname{sen} x\right]_0^1=\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}0=\operatorname{sen}1$

c) $\int_{0}^{3}\left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{2x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^3=\left(\frac{486}{5}-\frac{27}{2}+\frac{2\sqrt{27}}{3}\right)-0=\frac{837}{10}+2\sqrt{3}$

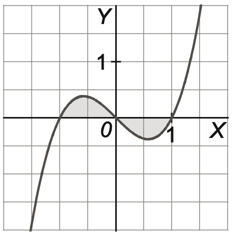
d) $\int_{-1}^{1}\left(4e^x-x\right)dx=\left[4e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(4e-\frac{1}{2}\right)-\left(4e^{-1}-\frac{1}{2}\right)=4e-\frac{4}{e}=\frac{4e^2-4}{e}$

18. Calcula el área encerrada por el eje X, la gráfica de $f(x)=x\left(x^2-1\right)$ y las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$.

Al dibujar el recinto se observa que un trozo está por debajo del eje *X* y otro por encima.

Como la función es simétrica respecto del origen, ya que $f(-x)=-f(x)$, el área pedida es:

$$2\int_{-1}^{0}x\left(x^2-1\right)dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=2\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=2\cdot\left[0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\text{ u}^2.$$



19. Ejercicio interactivo.

20. Ejercicio resuelto.

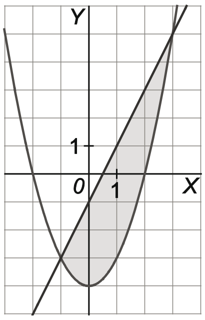
21. Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=2x-1$.

Se calculan los puntos de corte de las funciones:

$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4=2x-1\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1,\ x=3$

En el intervalo [–1, 3] tenemos $g(x)\geq f(x)$, por tanto, el área pedida es:

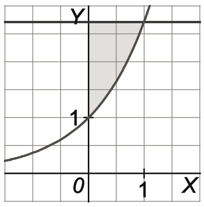
$$A=\int_{-1}^{3}(g(x)-f(x))dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ u}^2$$



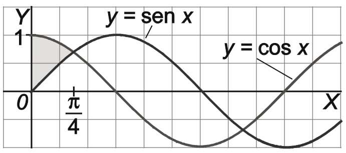
22. Calcula el área de la región limitada por el eje *Y*, la recta $y=e$ y la curva $y=e^x$.

Como la curva $y=e^x$ y la recta $y=e$ se cortan si $x=1$, el recinto es el mostrado en la figura. Como en dicho recinto la recta está por encima de la curva, el área pedida es:

$$A=\int_{0}^{1}\left(e-e^x\right)dx=\left[ex-e^x\right]_0^1=0-(-1)=1\text{ u}^2$$



23. Calcula el área sombreada en la figura.



El área es $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\operatorname{sen}x)dx=\left[\operatorname{sen}x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1\text{ u}^2$

24. Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y $g(x) = x(x-1)$.

Se calculan los puntos de corte de las funciones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x(x-1)(x-2) = x(x-1) \Rightarrow x(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 3$

En el intervalo [0, 1]se cumple que $f(x) \geq g(x)$, mientras que en [1, 3] $g(x) \geq f(x)$, por tanto:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ \text{u}^2.$$

25. En cada caso, calcula el espacio neto recorrido por el móvil cuya velocidad se proporciona, en el intervalo de tiempo considerado.

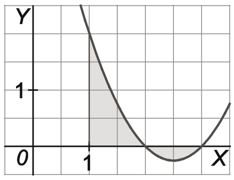
a) $v(t) = t^2 - 5t + 6$ (ms^{-1}) en $t \in [1, 3]$ (s)

b) $v(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$ (ms^{-1}) en $t \in [0, 3]$ (s)

c) $v(t) = 2\cos t$ (ms^{-1}) en $t \in [0, 2\pi]$ (s)

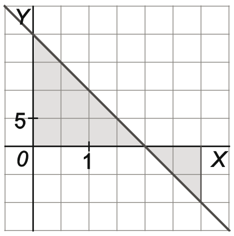
El espacio neto es igual al área encerrada entre la función velocidad y el eje *X* en el intervalo considerado.

a) La función corta al eje *X* si $v(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2,\ t = 3$, y ambos valores pertenecen al intervalo [1, 3]. Como $v(t) \geq 0$ si $1 \leq t \leq 2$ y $v(t) \leq 0$ si $2 \leq t \leq 3$, el espacio neto recorrido es:



$$e = \int_1^2 \left(t^2 - 5t + 6\right)dt - \int_2^3 \left(t^2 - 5t + 6\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t\right]_1^2 - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t\right]_2^3 = \frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = 1\ \text{m}$$

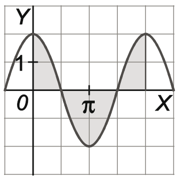
b) La función corta al eje *X* si $v(t) = 0 \Rightarrow 19{,}6 - 9{,}8t = 0 \Rightarrow t = 2$, que pertenece al intervalo [0, 3]. Como $v(t) \geq 0$ si $0 \leq t \leq 2$ y $v(t) \leq 0$ si $2 \leq t \leq 3$, el espacio neto recorrido es:



$$e = \int_0^2 (19{,}6 - 9{,}8t)\,dt - \int_2^3 (19{,}6 - 9{,}8t)\,dt = \left[19{,}6t - \frac{9{,}8t^2}{2}\right]_0^2 - \left[19{,}6t - \frac{9{,}8t^2}{2}\right]_2^3 =$$

$$= 19{,}6 - (-4{,}9) = 24{,}5\ \text{m}.$$

c) La función corta al eje *X* si $v(t) = 0 \Rightarrow \cos t = 0$, cuyas soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$. El espacio neto recorrido es 4 veces el área encerrada por la función y el eje *X* en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir: $e = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\,dt = 4\left[2\,\text{sen}\,t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8$ m.

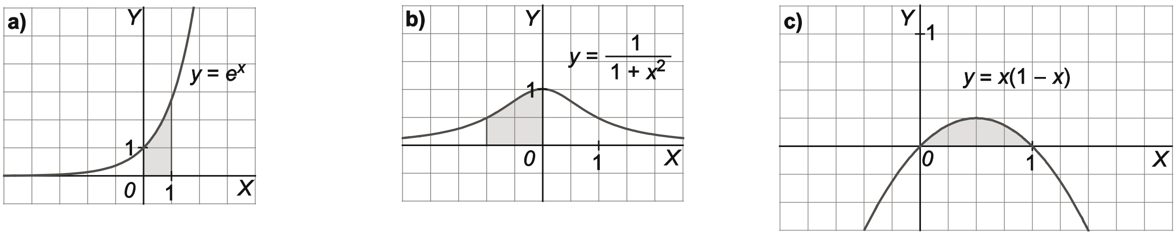


26 a 33. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Área bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo

34. Calcula el área de las siguientes regiones.

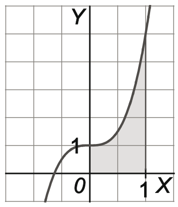


a) La función $F(x) = e^x$ verifica $F'(x) = f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1) - F(0) = e - 1$ u^2.

b) La función $F(x) = \operatorname{arctg} x$ verifica $F'(x) = f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(0) - F(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ u^2.

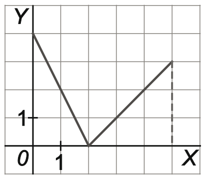
c) La función $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ verifica $F'(x) = f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$ u^2.

35. Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas, el eje de ordenadas, la curva $y = 4x^3 + 1$ y la recta $x = 1$.



La función $F(x) = x^4 + x$ verifica $F'(x) = f(x)$, por tanto, el área pedida es $F(1) - F(0) = 2 - 0 = 2$ u^2.

36. Obtén la función $F(x) : [0, 5] \to \mathbb{R}$, tal que $F(x)$ mida el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$, el eje horizontal y la vertical que pasa por el punto de abscisa x. Debes distinguir entre $0 \le x \le 2$ y $2 \le x \le 5$. Calcula también la derivada de la función $F(x)$.



Si $0 \le x \le 2$, la forma más cómoda de calcular el valor $F(x)$ es restar áreas de triángulos:

$$F(x) = 4 - \frac{1}{2}(2 - x)(-2x + 4) = 4 - (2 - x)^2$$

Si $2 < x \le 5$, se obtiene $F(x)$ sumando áreas de triángulos: $F(x) = 4 + \frac{1}{2}(x - 2)(x - 2) = 4 + \frac{1}{2}(x - 2)^2$

De este modo: $F(x) = \begin{cases} 4 - (2 - x)^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 4 + \dfrac{(x-2)^2}{2} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases} \Rightarrow F'(x) = \begin{cases} 2(2 - x) & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$, además $F'(2^-) = F'(2^+) = 0$,

por tanto: $F'(x) = \begin{cases} 2(2 - x) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases} = f(x)$ como afirma el teorema fundamental del cálculo.

Primitiva. Integral indefinida

37. Halla la función cuya derivada es la constante $k = 5$, y corta al eje de ordenadas en el punto $y = 3$.

La función buscada, $F(x)$, es una primitiva de $f(x) = 5$, es decir, $F(x) = \int 5\,dx = 5x + C$. Como, además, debe cortar al eje de ordenadas en $y = 3$, obtenemos $C = 3 \Rightarrow F(x) = 5x + 3$.

38. Halla la función cuadrática tal que su derivada es la recta $y = 4x + 5$ y pasa por el punto (–1, 3).

La función buscada, $F(x)$, es una primitiva de $f(x) = 4x + 5$, es decir, $F(x) = \int (4x + 5)\,dx = 2x^2 + 5x + C$. Como, además, ha de pasar por el punto (–1, 3), obtenemos: $F(-1) = 3 \Rightarrow 2 - 5 + C = 3 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow F(x) = 2x^2 + 5x + 6$.

39. Calcula una función f que pase por el origen y cuya derivada sea $f'(x) = \sqrt{x} + 2x\sqrt{x}$.

La función f es una primitiva de $f'(x)$, es decir, $f(x) = \int \left(\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$. Como, debe pasar por el origen: $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5}$

40. La derivada del producto dice que si $F(x) = f(x)g(x)$ entonces $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Basándose en esto, se puede calcular la siguiente integral:

$$\int \left(2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x\right) dx = x^2 \cos x + C$$

ya que, en este caso, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$ y la integral es el producto $F(x) = f(x)g(x)$.

Siguiendo el resultado anterior, identifica las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en los siguientes casos y calcula estas integrales:

a) $\int \left(2xe^x + x^2e^x\right) dx$

b) $\int (1 + \ln x)\,dx$

c) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x)\cos x\right) dx$

e) $\int \left(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\right) dx$

f) $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx$

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x \Rightarrow \int \left(2xe^x + x^2e^x\right) dx = \int \left(x^2e^x\right)' dx = x^2e^x + C$.

b) $\int (1 + \ln x)\,dx = \int \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right) dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$ con $f(x) = x$ y $g(x) = \ln x$, por tanto, tenemos $\int (1 + \ln x)\,dx = x\ln x + C$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx = \int \left(\sqrt{x}\ln x\right)' dx = \sqrt{x}\ln x + C$

d) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x)\cos x\right) dx = \int (\ln x \cdot \operatorname{sen} x)' dx = \ln x \cdot \operatorname{sen} x + C$

e) $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \left(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\right) dx = \int \left(e^x \operatorname{sen} x\right)' dx = e^x \operatorname{sen} x + C$

f) $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx = \int \left(-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right) dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$ con $f(x) = e^x$ y $g(x) = -\cos x$, por tanto, tenemos $\int \left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) dx = -e^x \cos x + C$.

41. Calcula la función que tiene por derivada $f'(x) = x + 1$ y corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto de abscisa –2.

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$, además $f(-2) = -2$, por tanto: $2 - 2 + C = -2 \Rightarrow C = -2 \Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2$.

42. Halla dos funciones que tengan por derivada $f'(x)=3x^2+4x+2$ de tal forma que cada una de ellas pase por una de las intersecciones de la curva $y=x^2+1$ con la recta $y=x+3$.

Las funciones buscadas son primitivas de $f'(x)$, es decir, son de la forma $f(x)=x^3+2x^2+2x+C$.

Los puntos de intersección de $y=x^2+1$ con $y=x+3$ son: $x^2+1=x+3 \Rightarrow x=-1,\ x=2 \Rightarrow P_1(-1, 2)$ y $P_2(2, 5)$

Las funciones son: $f_1(-1)=2 \Rightarrow C=3 \Rightarrow f_1(x)=x^3+2x^2+2x+3$ y $f_2(2)=5 \Rightarrow C=-15 \Rightarrow f_2(x)=x^3+2x^2+2x-15$

Primitivas inmediatas

43. Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla de primitivas inmediatas y a continuación, resuélvelas.

a) $\int\left(3x^3-2x^2+x-1\right)dx$ **e)** $\int\left(x^6+4x^2+4x\right)\left(6x^2+3\right)dx$ **i)** $\int\frac{6x}{9x^4+12x^2+5}dx$

b) $\int\left(\frac{x^2}{3}-5x+\frac{2}{5}\right)dx$ **f)** $\int\frac{x}{1+x^4}dx$ **j)** $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx$

c) $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx$ **g)** $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}dx$ **k)** $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

d) $\int(3x-5)^2\,dx$ **h)** $\int\frac{x^4+2x^2-1}{2\sqrt{x}}dx$ **l)** $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx$

a) Tipo 1: $\int\left(3x^3-2x^2+x-1\right)dx=\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$

b) Tipo 1: $\int\left(\frac{x^2}{3}-5x+\frac{2}{5}\right)dx=\frac{x^3}{9}-\frac{5x^2}{2}+\frac{2x}{5}+C$

c) Tipos 1 y 2: $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx=\ln|x|+2x+C$

d) Tipo 1: $\int(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\int 3(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-5)^3}{3}+C=\frac{(3x-5)^3}{9}+C$

e) Tipo 1: $\int\left(x^6+4x^2+4x\right)\left(6x^2+3\right)dx=\int\left(6x^8+3x^6+24x^4+24x^3+12x^2+12x\right)dx=$

$=\frac{2x^9}{3}+\frac{3x^7}{7}+\frac{24x^5}{5}+6x^4+4x^3+6x^2+C$

f) Tipo 9: $\int\frac{x}{1+x^4}dx=\int\frac{x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+C$

g) Tipos 1 y 2: $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}dx=\int\left(x^2-5x+\frac{3}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3\ln|x|+C$

h) Tipo 1: $\int\frac{x^4+2x^2-1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int x^{\frac{7}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx-\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{9}\sqrt{x^9}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\sqrt{x}+C$

i) Tipo 9: $\int\frac{6x}{9x^4+12x^2+5}dx=\int\frac{6x}{1+\left(3x^2+2\right)^2}dx=\operatorname{arctg}\left(3x^2+2\right)+C$

j) Tipo 1: $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{17}{4}}dx=\frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}}+C=\frac{4\sqrt[4]{x^{21}}}{21}+C=\frac{4x^5\sqrt[4]{x}}{21}+C$

k) Tipo 1: $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x\,dx=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C$

l) Tipo 1: $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\int\left(x^3-x+x\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}dx=$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}+C$

44. Para cada una de las primitivas siguientes, identifícalas con una de la tabla de primitivas inmediatas y resuélvelas.

a) $\int \operatorname{sen} 2x\, dx$

b) $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$

c) $\int \operatorname{tg}(3x)\, dx$

d) $\int x e^{x^2}\, dx$

e) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$

f) $\int x^2 5^{x^3-1}\, dx$

g) $\int \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)} \cos\alpha\, d\alpha$

h) $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

i) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

j) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

k) $\int e^{2x} \sqrt[7]{e^{2x}+1}\, dx$

l) $\int \frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

a) Tipo 5: $\int \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b) Suma de primitivas de tipo 5 y 9: $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = -\cos x + 2\operatorname{arctg} x + C$

c) Tipo 2: $\int \operatorname{tg}(3x)\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\, dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)| + C$

d) Tipo 3: $\int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

e) Tipo 1: $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \cos^3 x(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

f) Tipo 4: $\int x^2 5^{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 5^{x^3-1}\, dx = \frac{5^{x^3-1}}{3\ln 5} + C$

g) Tipo 1: $\int \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha+2\pi)} \cos\alpha\, d\alpha = \int \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \alpha \cdot \cos\alpha\, d\alpha = \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \alpha}{3} + C = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen}^3 \alpha}}{3} + C$

h) Tipo 9: $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$

i) Tipo 1: $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$

j) Tipo 2: $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \ln\left|1+\operatorname{sen}^2 x\right| + C$

k) Tipo 1: $\int e^{2x} \sqrt[7]{e^{2x}+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{7}} 2e^{2x}\, dx = \frac{7\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{8}{7}}}{16} + C = \frac{7}{16}\sqrt[7]{\left(e^{2x}+1\right)^8} + C =$

l) Tipo 1: $\int \frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^{-4} x \cos x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{-3} x}{9} + C = -\frac{1}{9\operatorname{sen}^3 x} + C$

Integral definida. Regla de Barrow

45. Determina la función definida en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que presenta un mínimo relativo en el punto (2, –4) y que $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 45$.

Se sabe que: $f(2) = -4 \Rightarrow 4a + 2b + c = -4$, $f'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$ y $\int_{-3}^{0} f(x)dx = 45 \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-3}^{0} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\left(-9a + \frac{9b}{2} - 3c\right) = 45 \Rightarrow 6a - 3b + 2c = 30$.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -4 \\ 4a + b = 0 \\ 6a - 3b + 2c = 30 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{19}{13},\ b = -\frac{76}{13},\ c = \frac{24}{13} \Rightarrow f(x) = \frac{19}{13}x^2 - \frac{76}{13}x + \frac{24}{13}$$

46. ¿Cuánto debe valer el parámetro a en la función $f(x) = x - a\,\text{sen}\,x$ si se sabe que $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$.

$\int_0^{\pi} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + a\cos x\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{2} - a\right) - a = \frac{\pi^2}{2} - 2a$, por tanto, tenemos: $\frac{\pi^2}{2} - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi^2}{4}$.

47. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int_0^2 e^{u+3}\,du$

c) $\int_0^{3\pi} \cos\frac{b}{2}\,db$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,\text{tg}\,t\,dt$

e) $\int_0^1 x\left(1+x^2\right)^{20}\,dx$

f) $\int_0^2 \left(1+x^2\right)\sqrt{x}\,dx$

a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3\left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \left[2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^3 = \left(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) - (2-2) = 4\sqrt{3}$

b) $\int_0^2 e^{u+3}\,du = \left[e^{u+3}\right]_0^2 = e^5 - e^3$

c) $\int_0^{3\pi} \cos\frac{b}{2}db = 2\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{b}{2}db = 2\left[\text{sen}\frac{b}{2}\right]_0^{3\pi} = 2\left(\text{sen}\frac{3\pi}{2} - \text{sen}\,0\right) = -2$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,\text{tg}\,t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\text{sen}\,t\cos^{-2}t\,dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$

e) $\int_0^1 x\left(1+x^2\right)^{20}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{20}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{21}}{21}\right]_0^1 = \frac{2^{21}-1}{42}$

f) $\int_0^2\left(1+x^2\right)\sqrt{x}\,dx = \int_0^2\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7}\right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{7} = \frac{76\sqrt{2}}{21}$

48. Si f' es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$ sabiendo que $\int_1^7 f'(x)\,dx = 3$?

$\int_1^7 f'(x)dx = f(7) - f(1) = f(7) - 2$, por tanto: $f(7) - 2 = 3 \Rightarrow f(7) = 5$

49. **Si $f(x)=x+|1-x|$, halla el valor de: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$**

$$f(x)=\begin{cases} x+1-x & \text{si } x<1 \\ x-1+x & \text{si } x\geq 1\end{cases}=\begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}, \text{ por tanto, se tiene:}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{1} 1dx+\int_{1}^{2}(2x-1)\,dx=[x]_{-2}^{1}+\left[x^2-x\right]_{1}^{2}=[1-(-2)]+[(4-2)-(1-1)]=5$$

50. **Calcula:**

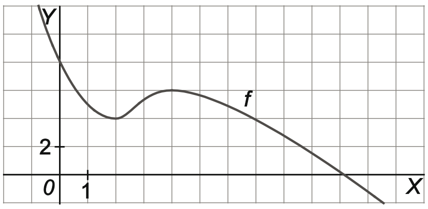
a) $\int_{-\pi}^{2\pi}|\text{sen}\,x|\,dx$

b) $\int\left(x^4+4x^2+4x\right)\left(4x^2+5\right)dx$

a) $\int_{-\pi}^{2\pi}|\text{sen}\,x|\,dx=3\int_{0}^{\pi}\text{sen}\,x\,dx=3[-\cos x]_{0}^{\pi}=3(1-(-1))=6$

b) $\int\left(x^4+4x^2+4x\right)\left(4x^2+5\right)dx=\int\left(4x^6+21x^4+16x^3+20x^2+20x\right)dx=\frac{4x^7}{7}+\frac{21x^5}{5}+4x^4+\frac{20x^3}{3}+10x^2+C$

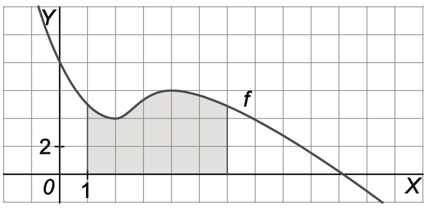
51. **Si la gráfica de $f(x)$ es la de la figura:**



¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación para $\int_{1}^{6} f(x)\,dx$?

a) –24 **b)** 9 **c)** 26 **d)** 38

La integral coincide con el área de la figura sombreada.



Como cada cuadrito de la cuadrícula representa 2 u^2 y hay 10 cuadritos enteros y 5 trozos no enteros,el área supera las 20 u^2 pero es inferior a 30 u^2, por lo que la respuesta correcta es 26 u^2.

Aplicaciones de la integral

52. ***Calcula el área limitada por cada grupo de curvas.**

a) $y = 5x - x^2$, $y = x$

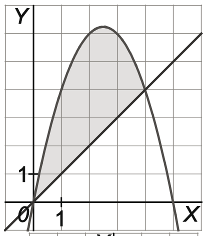
b) $y = |x|$, $y = 2 - x^2$

c) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = -2$

d) $y = \sqrt{x}$ $\quad y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0 \quad x = 2$

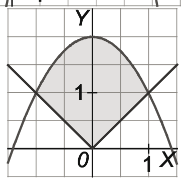
e) $y = \operatorname{sen} x$, $y = x(x-\pi)(x-2\pi)$

f) $y = x + 3 \quad y = -3x$, $y = x^2 - 2x - 1$



a) Puntos de corte: $5x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$

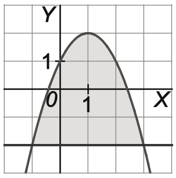
$$A = \int_0^4 \left(5x - x^2 - x\right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



b) Por simetría, podemos calcular el área del recinto con $x \geq 0$ y multiplicarla por 2.

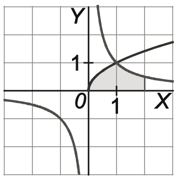
Puntos de corte: Si $x \geq 0 \Rightarrow x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$A = 2\int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}\ \text{u}^2$$



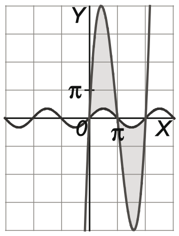
c) Puntos de corte: $-x^2 + 2x + 1 = -2 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

$$A = \int_{-1}^3 \left(-x^2 + 2x + 1 - (-2)\right) dx = \int_{-1}^3 \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



d) Puntos de corte en el intervalo [0, 2]: $\sqrt{x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = 1$

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \left[\ln|x|\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \ln 2\ \text{u}^2.$$



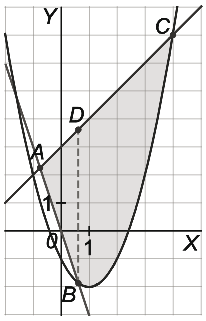
e) Las curvas se cortan si $x = 0$, $x = \pi$ o $x = 2\pi$, delimitando dos recintos de igual área.

$$A = 2\int_0^{\pi} \left(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x - \operatorname{sen} x\right) dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{2} - 4\ \text{u}^2.$$

f) Como se observa en la figura, las curvas delimitan varios recintos, pero solo uno de ellos está limitado por las gráficas de las tres curvas, el triángulo mixtilíneo *ABC*, que se divide a su vez en dos recintos, el triángulo *ABD* y el triángulo mixtilíneo *BCD*.

Las abscisas de estos puntos son:

A: $x + 3 = -3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{4}$ $\quad B$: $-3x = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$



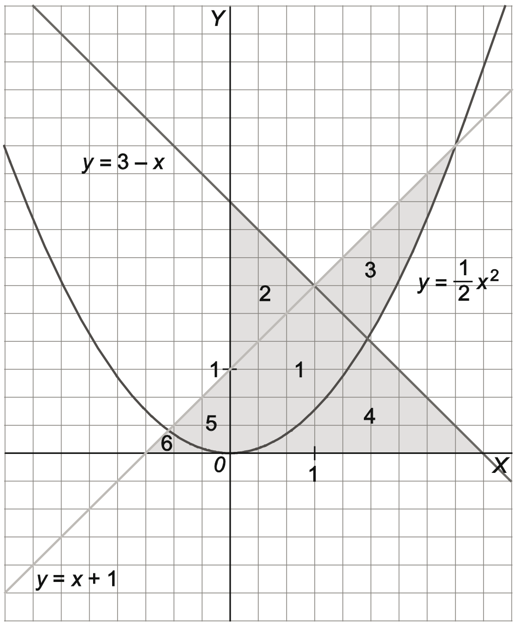
C: $x + 3 = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$$A = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \left(x + 3 - (-3x)\right) dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} \left(x + 3 - (x^2 - 2x - 1)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (4x + 3)\, dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right) dx = \left[2x^2 + 3x\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} =$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{9}{8}\right)\right) + \left(\frac{56}{3} - \frac{11 + 11\sqrt{5}}{12}\right) = \frac{489 - 10\sqrt{5}}{24}\ \text{u}^2$$

53. Calcula el área de las regiones numeradas de 1 a 6 en el siguiente dibujo.



Región 1: $\int_0^1 \left(x+1-\frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_1^{\sqrt{7}-1}\left(3-x-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_1^{\sqrt{7}-1} =$

$= \left(\frac{4}{3}-0\right)+\left(\frac{7\sqrt{7}-10}{3}-\frac{7}{3}\right) = \frac{7\sqrt{7}-13}{3}\ \text{u}^2 \simeq 1{,}84\ \text{u}^2$

Región 2: $\int_0^1 \left[3-x-(x+1)\right]dx = \int_0^1 (2-2x)\,dx = \left[2x-x^2\right]_0^1 = 1-0 = 1\ \text{u}^2$

Región 3: $\int_1^{\sqrt{7}-1}\left[x+1-(3-x)\right]dx + \int_{\sqrt{7}-1}^{1+\sqrt{3}}\left(x+1-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[x^2-2x\right]_1^{\sqrt{7}-1} + \left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_{\sqrt{7}-1}^{1+\sqrt{3}} =$

$= \left(11-4\sqrt{7}-(-1)\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{3}-\frac{20-5\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{7}-16}{3}\ \text{u}^2 \simeq 0{,}81\ \text{u}^2$

Región 4: $\int_0^{\sqrt{7}-1}\frac{1}{2}x^2\,dx + \int_{\sqrt{7}-1}^{3}(3-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{7}-1} + \left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{7}-1}^{3} = \left(\frac{5\sqrt{7}-11}{3}-0\right)+\left(\frac{9}{2}-\left(4\sqrt{7}-7\right)\right) =$

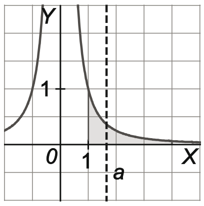
$= \frac{47-14\sqrt{7}}{6}\ \text{u}^2 \simeq 1{,}66\ \text{u}^2$

Región 5: $\int_{1-\sqrt{3}}^{0}\left[x+1-\frac{1}{2}x^2\right]dx = \left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6}\right]_{1-\sqrt{3}}^{0} = 0-\left(\frac{4}{3}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-\frac{4}{3}\ \text{u}^2 \approx 0{,}4\ \text{u}^2$

Región 6: $\int_{-1}^{1-\sqrt{3}}(x+1)\,dx + \int_{1-\sqrt{3}}^{0}\frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1-\sqrt{3}} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{1-\sqrt{3}}^{0} = \left(-2\sqrt{3}+3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(0-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{3}\right)\right) =$

$= \frac{11}{6}-\sqrt{3}\ \text{u}^2 \simeq 0{,}1\ \text{u}^2$

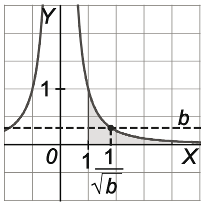
54. Halla el número *a* para el que la recta *x*=*a* divida en dos partes de igual área la región limitada por el eje *X*, la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ y las rectas *x*= 1 y *x*= 4.



Se quiere calcular *a* para que $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx$, con lo que:

$$\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^4 \Rightarrow -\frac{1}{a}+1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{8}{5}$$

55. Halla el número *b* para el que la recta $y = b$ divida en dos partes de igual área a la región del problema anterior.



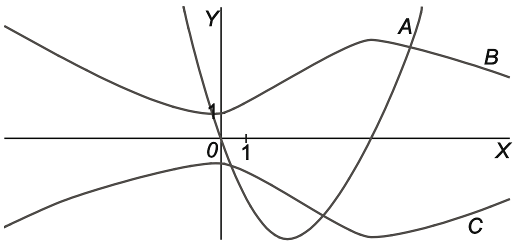
El área en cuestión es $\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$ u^2, por tanto, hay queencontrar *b*tal que la recta $y = b$ divida la región en dos subregiones de área $\frac{3}{8}$ u^2.

Subregión superior: El área de esta subregión se puede calcular restándole a $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} = -\sqrt{b}+1$ el área de un rectángulo de base $\frac{1}{\sqrt{b}}-1$ y altura *b*.

$1-\sqrt{b}-\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)b = \frac{3}{8} \Rightarrow 2\sqrt{b} = b+\frac{5}{8} \Rightarrow 4b = b^2+\frac{5}{4}b+\frac{25}{64} \Rightarrow b^2-\frac{11}{4}b+\frac{25}{64} = 0$, de donde se obtienen dos soluciones, de las que solo tiene sentido $b = \frac{11-4\sqrt{6}}{8} \simeq 0{,}15$.

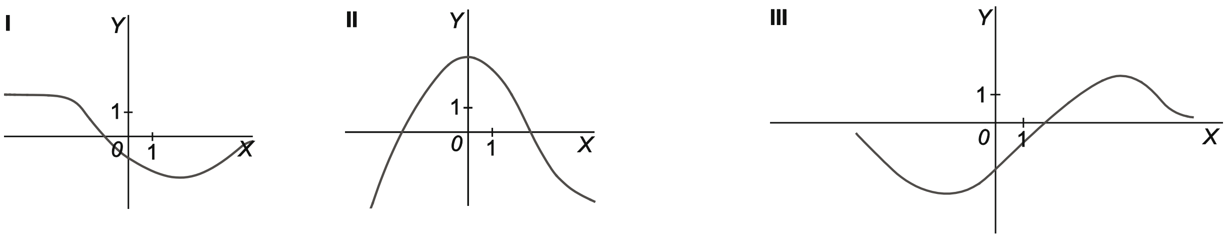
Síntesis

56. Considera las tres gráficas de la figura. Si la gráfica *A* es la de cierta función *f*, ¿cuál de las otras dos es la gráfica de una primitiva de *f* ?



La gráfica de la primitiva de *f* es *C*, porque cuando esta función crece, *f* es positiva y cuando decrece, *f* es negativa.

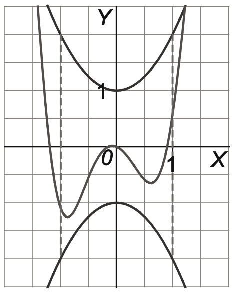
57. Las gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por este orden a las de una función *f* derivable, su función derivada *f* ' y una primitiva *F* de *f*. Identifica cada gráfica justificando tu elección.



Cuando la III crece la II es positiva y cuando III decrece, la II es negativa. Cuando la II crece la I es positiva y cuando II decrece, la I es negativa.Es decir, *F* es la III, *f* es la II y f' es la I.

58. De una función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ se sabe que para cada x de dicho intervalo se cumple que $|f(x)|\le 1+x^2$. De los números –3; –2; –1; 2,5; 2,75, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$?

Del enunciado, $-(1+x^2)\le f(x)\le 1+x^2$ si $-1\le x\le 1$, es decir, la gráfica de f presenta una situación como la de la figura.

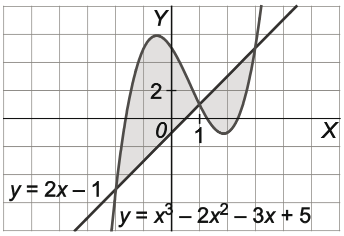


Como $\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$ y $\int_{-1}^{1}-(1+x^2)\,dx=-\frac{8}{3}$, el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ debe estar entre estos números, así, el valor de la integral puede ser–2; –1 o 2,5.

59. Calcula el valor de *a* para que se cumpla: $\int_0^a 3x^2\,dx=2\int_a^1 3x^2\,dx$

$$\int_0^a 3x^2\,dx=2\int_a^1 3x^2\,dx\Rightarrow\left[x^3\right]_0^a=2\left[x^3\right]_a^1\Rightarrow a^3=2\left(1-a^3\right)\Rightarrow 3a^3=2\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

60. Calcula el área encerrada por las curvas de la figura.



Las curvas se cortan si:

$2x-1=x^3-2x^2-3x+5\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=3$.

El área pedida es:

$$\int_{-2}^{1}\left[\left(x^3-2x^2-3x+5\right)-(2x-1)\right]dx+\int_1^3\left[(2x-1)-\left(x^3-2x^2-3x+5\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx+\int_1^3-\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_1^3=$$

$$=\left(\frac{37}{12}+\frac{38}{3}\right)-\left(-\frac{9}{4}-\frac{37}{12}\right)=\frac{253}{12}\ \text{u}^2.$$

61. Supón que *f* es una función continua y que $\int_0^1 f(x)\,dx=2$, $\int_0^2 f(x)\,dx=1$ y $\int_2^4 f(x)\,dx=7$.

a) Calcula $\int_0^4 f(x)\,dx$, $\int_1^2 f(x)\,dx$ y $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) Explica por qué *f* debe ser negativa en algún punto del intervalo [0, 2].

c) Explica por qué $f(x)\ge 3{,}5$ para al menos un valor del intervalo [2, 4].

a) $\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx=8$ $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=-1$

$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=6$

b) Se prueba que *f* debe ser negativa en algún punto del intervalo [1, 2], de donde, en particular, se deduce lo que pide el enunciado. Si fuera $f(x)\ge 0$ en [1, 2], $\int_1^2 f(x)\,dx\ge 0$, en contradicción con el apartado anterior.

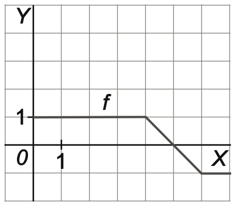
c) Si fuera $f(x)<3{,}5$ para todos los puntos del intervalo [2, 4]: $\int_2^4 f(x)\,dx<2\cdot 3{,}5=7$, en contradicción con el enunciado.

62. La figura siguiente representa la gráfica de una función $f:[0,7]\to\mathbb{R}$.

Sea $F:[0,7]\to\mathbb{R}$ la función definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Calcula $F(4)$ y $F(7)$.

b) Dibuja la gráfica de $F(x)$ explicando cómo lo haces.



a) Como F es positiva entre 0 y 4, $F(4)$ es el área comprendida entre la función f y el eje X, desde $x=0$ hasta $x=4$. Como esta región es un rectángulo de 4 u^2 de área, $F(4)=4$.

Para calcular $F(7)$ hay que tener en cuenta que entre 0 y 7 la función f tiene tramos negativos, determinando con el eje X regiones cuyas áreas habrá que restar. En concreto, $F(7)$ será el área de un rectángulo de base 4 y altura 1, más el área de un triángulo de base 1 y altura 1, menos el área de un triángulo de base 1 y altura 1, menos el área de un cuadrado de lado 1, es decir, $F(7)=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=3$.

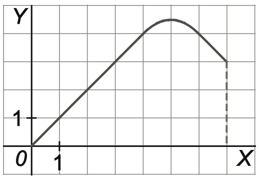
b) Como $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x<4\\ 5-x & \text{si } 4\le x\le 6\\ -1 & \text{si } 6<x\le 7\end{cases}$, para calcular $F(x)$ se integra f a medida que x va recorriendo el intervalo [0, 7] teniendo en cuenta los cambios que se dan en $x=4$ y $x=6$.

Si $0\le x<4$, $F(x)=\int_0^x 1\,dt=[t]_0^x=x$

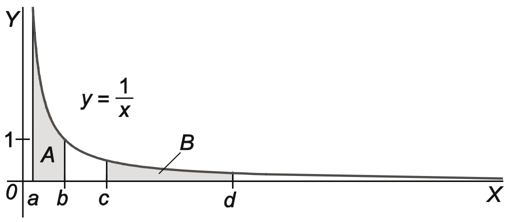
Si $4\le x\le 6$, $F(x)=\int_0^4 1\,dt+\int_4^x(5-t)\,dt=4+\left[5t-\frac{t^2}{2}\right]_4^x=4+5x-\frac{x^2}{2}-12=-\frac{x^2}{2}+5x-8$

Si $6<x\le 7$, $F(x)=\int_0^4 1\,dt+\int_4^6(5-t)\,dt+\int_6^x -1\,dt=4+0-[t]_6^x=4-x+6=-x+10$

Así, $F(x)=\begin{cases}x & \text{si } 0\le x<4\\ -\frac{x^2}{2}+5x-8 & \text{si } 4\le x\le 6\\ -x+10 & \text{si } 6<x\le 7\end{cases}$



63. Si $c=ra$ y $d=rb$, ¿qué área es mayor, A o B?



$$A=\int_a^b \frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln b-\ln a=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$B=\int_c^d \frac{1}{x}dx=[\ln x]_c^d=\ln d-\ln c=\ln\left(\frac{d}{c}\right)=\ln\left(\frac{rb}{ra}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

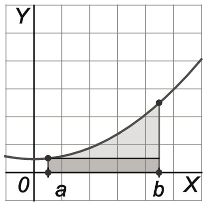
Las áreas son iguales.

CUESTIONES

64. Un estudiante, aunque no sabe obtener la derivada del cociente, dice que las funciones $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ y $g(x)=\frac{2x+2}{2x+1}$ son primitivas de la misma función. Si el profesor dice que está en lo correcto, ¿cómo ha razonado el alumno?

El estudiante ha observado que $g(x)=\frac{2x+2}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{1}{2x+1}=1+f(x)$, por lo que, $f'(x)=g'(x)$, es decir, efectivamente, f y g son primitivas de la misma función.

65. Justifica que si $f(a) > 0$ y f es creciente en [a, b], entonces $\int_a^b f(x)dx \geq f(a)(b-a)$.



Como $f(a)$ es positiva y f es crecienteen [a, b], se deduce que f es positiva en todo el intervalo [a, b], por lo que $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la figura bajo dicha curva.

Por otra parte, $f(a)(b-a)$ es el área del rectángulo marcado en la figura, cuya área es claramente menor, o igual si la función fuera constante en [a, b], que la integral definida, yaque la función f es creciente.

66. Razona si es cierto o no que si f es una función continua no negativa en [1, 5] y $f(3) > 0$, entonces $\int_1^5 f(x)dx > 0$.

Obviamente, al ser f no negativa en [1, 5] se tiene $\int_1^5 f(x)dx \geq 0$.

Para ver que la desigualdad es estricta observemos que, al ser $f(3) > 0$ y $f$continua, existe un intervalo $[3-r, 3+r]$ en el que f es positiva, por ello, tenemos $\int_1^5 f(x)dx \geq \int_{3-r}^{3+r} f(x)dx > 0$.

67. Sea f una función continua en el intervalo [–1, 3] y $g(x) = f(x) + 1$. Si $\int_{-1}^3 f(t)\,dt = 7$, ¿cuál ha de ser el valor de $\int_{-1}^3 g(u)\,du$?

$$\int_{-1}^3 g(u)\,du = \int_{-1}^3 (f(u)+1)\,du = \int_{-1}^3 f(u)du + \int_{-1}^3 1du = 7 + 4 = 11$$

68. Si $\int_0^1 f(x)dx = 2$ y $\int_0^2 f(x)dx = 1$, entonces ¿habrá algún punto en el intervalo [1, 2] en el que f deba ser negativa?

En efecto, debe haber algún punto en el intervalo [1, 2] en el que f es negativa, ya que en caso contrario sería $\int_1^2 f(x)dx \geq 0$, en contradicción con que $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = -1$.

69. Si $\int_a^b f(x)dx > 0$ y c es un número de [a, b], ¿será entonces $\int_a^c f(x)dx < \int_a^b f(x)dx$?

No es obligatoriamente cierto. Basta considerar funciones que sean positivas en un tramo y negativas en el siguiente, como la función seno:

$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$, y, en cambio, $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 1$.

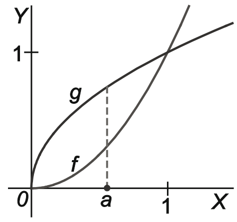
70. ¿Será cierto que si $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, entonces $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$?

Si $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, el conjunto de primitivas de f coincide con el conjunto de primitivas de g, por tanto, si F es una primitiva de f, también lo es de g, con lo que, efectivamente, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = F(1) - F(0)$.

71. Si f y g son funciones que admiten derivada segunda y $f(x) \le g(x)$ para todo x, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones tiene que ser verdadera?

I) $f'(x) \le g'(x)$ para todo x **II)** $f''(x) \le g''(x)$ para todo x **III)** $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$

Las afirmaciones I y II son falsas como muestran las gráficas de las funciones f y g, que cumplen que $f(x) \le g(x)$, pero, en cambio, $f'(a) > g'(b)$ y $f''(a) > 0$ y $g''(b) < 0$, con lo que $f''(a) > g''(b)$.



La afirmación III es verdadera pues $f(x) \le g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \le 0$ para todo x, con lo que $\int_0^1 (f-g)(x)dx \le 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$.

72. ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

b) Si f' es continua, entonces: $\int_0^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$

c) $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx = 2x$

d) $\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c\right)dx = 2 \cdot \int_0^1 \left(ax^2 + c\right)dx$

e) El área de la región encerrada por la curva $f(x) = x(x-1)(x-3)$ y el eje horizontal se mide con:

$\int_0^3 x(x-1)(x-3)\,dx$

f) El área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es 6.

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$, por lo que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ y la afirmación es verdadera.

Observemos que si f es impar, tenemos $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$, de donde deducimos que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

b) Al ser f' continua, aplicando la regla de Barrow tenemos $\int_0^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$, la afirmación es verdadera.

c) Falsa, pues $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx$ es un número.

d) $\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c\right)dx = \int_{-1}^{1} \left(ax^2 + c\right)dx + \int_{-1}^{1} bx\,dx$. Al ser $f(x) = ax^2 + c$ par y $g(x) = bx$ impar, usando las propiedades demostradas en el apartado a se concluye que $\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + c\right)dx = 2\int_0^1 \left(ax^2 + c\right)dx$ y $\int_{-1}^{1} bx\,dx = 0$, con lo que la afirmación es cierta.

e) Falso, ya que la función $f(x) = x(x-1)(x-3)$ cambia de signo en [0, 3].

f) Falso, $\int_0^3 (x^2 - 1)dx = 6$, pero el área pedida no es esta integral, pues la función $f(x) = x^2 - 1$ cambia de signo en [0, 3].

En concreto, el área pedida es $\int_0^1 -(x^2-1)dx + \int_1^3 (x^2-1)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{22}{3}$ u^2.

73. Dadas las siguientes integrales, ¿cuál no es ceroy por qué ?

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^3 x\, dx$ **c)** $\int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}\, x\, dx$ **e)** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

b) $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$ **d)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, \text{sen}\, x\, dx$ **f)** $\int_{-1}^{1} \text{tg}\, x\, dx$

Las integrales de los apartados a), d) y f) son nulas, ya que las funciones integradas son impares.

Las integrales de los apartados b) y c) también son nulas:

$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = [\text{sen}\, x]_0^{\pi} = \text{sen}\, \pi - \text{sen}\, 0 = 0$ $\int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}\, x\, dx = [-\cos x]_{\pi}^{3\pi} = -\cos 3\pi + \cos \pi = -(-1) - 1 = 0$

La integral del apartado e) no es cero pues la función $f(x) = \cos^2 x \geq 0$ para todo x, por lo que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$ mide el área de la región encerrada por dicha curva y el eje horizontal entre $-\pi$ y π.

74. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ está siempre por encima del eje horizontal. Si se pide calcular el área de la región limitada por dicha gráfica, el eje horizontal y las verticales $x=-1$ y $x=3$, se puede proceder así:

$F(x) = \dfrac{-1}{x}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, por tanto el área será:

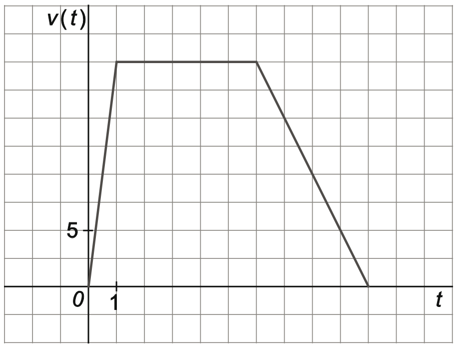
$$\text{Área} = F(3) - F(-1) = \frac{-1}{3} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{-4}{3}$$

que, al ser negativo, es un número que no puede medir un área. ¿Qué hay de erróneo en este razonamiento?

La función $f(x)$ no es continua en el intervalo [–1, 3], por lo que no se puede aplicar la regla de Barrow.

PROBLEMAS

75. La velocidad de un automóvil ha variado de acuerdo a lo recogido en la siguiente gráfica.



a) Calcula la aceleración del automóvil en cada uno de los tres tramos del recorrido.

b) Calcula el espacio total recorrido por dicho automóvil.

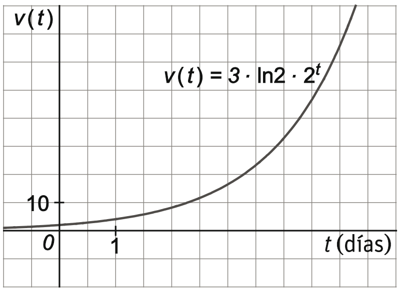
c) Calcula la velocidad que llevará el automóvil en los instantes de tiempo $t = 0{,}5$ s, $t = 3{,}5$ s, $t = 6{,}5$ s y $t = 8{,}5$ s.

a) Como la aceleración es la derivada de la velocidad, su valor en cada punto es el valor de la pendiente de la gráfica en dicho punto. Así, en el primer tramo, de 0 a 1 s, la aceleración es $a = \dfrac{20}{1} = 20$; en el segundo tramo, de 1 a 6 s, la aceleración es $a = 0$ y en el tercer tramo, de 6 a 10 s, la aceleración es $a = \dfrac{-20}{4} = -5$.

b) Como la velocidad es la derivada de la función de posición, el espacio total recorrido es el área del recinto limitado por la función velocidad: $e = \int_0^{10} v(t)\,dt = \dfrac{1\cdot 20}{2} + 5\cdot 20 + \dfrac{4\cdot 20}{2} = 150$.

c) $v(t) = \begin{cases} 20x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 20 & \text{si} \quad 1 < x < 6 \\ -5x + 50 & \text{si} \quad 6 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow v(0{,}5) = 10$, $v(3{,}5) = 20$, $v(6{,}5) = 17{,}5$ y $v(8{,}5) = 7{,}5$.

76. La velocidad de crecimiento de una población de bacterias es la representada en la gráfica, donde la velocidad se expresa en bacterias por día y el tiempo en días.



a) ¿Qué cantidad de bacterias habrá pasados 5 días?

b) ¿Y pasados 15 días?

c) ¿Cuál es la ecuación que determina el número de bacterias que habrá en un tiempo *t*?

La cantidad de bacterias tras *t* días viene dada por el área bajo la gráfica entre 0 y *t*, por tanto:

a) $\int_0^5 v(t)\,dt = \left[3\cdot 2^t\right]_0^5 = 3\left(2^5 - 2^0\right) = 93$ bacterias

b) $\int_0^{15} v(t)\,dt = \left[3\cdot 2^t\right]_0^{15} = 3\left(2^{15} - 2^0\right) = 98301$ bacterias

c) $n(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \left[3\cdot 2^x\right]_0^t = 3\left(2^t - 1\right)$

77. La intensidad de la lluvia caída en un observatorio, en litros por minuto, registrada por un pluviógrafo, durante una tormenta se puede representar mediante la función:

$$\boldsymbol{f(t) = 4(1 - e^{-0{,}1t}) \qquad 0 < t < 60 \text{ min}}$$

Calcula la cantidad de agua recogida por metro cuadrado en dicho observatorio en la hora que duró la tormenta.

Nota: Integra $f(t)$ en el intervalo de tiempo pedido.

Cantidad de agua $= \int_0^{60} 4\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)dt = 4\left[t + 10e^{-0{,}1t}\right]_0^{60} = 4\left[\left(60 + 10e^{-6}\right) - (0 + 10)\right] = 4\cdot\left(50 + \frac{10}{e^6}\right) = 200 + \frac{40}{e^6}$ L/m^2,

es decir, se han recogido aproximadamente 200 L/m^2.

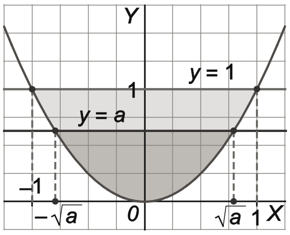
78. Al pisar el freno ante un semáforo, la velocidad de un coche (en ms^{-1}) está dada por $v(t) = 30 - 6t$. Calcula los segundos que tarda en parar y el espacio recorrido.

El coche se detiene cuando $v(t) = 0$, es decir, tarda en detenerse $t = \frac{30}{6} = 5$ segundos.

Durante ese tiempo, el espacio recorrido ha sido $\int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (30 - 6t)\,dt = \left[30t - 3t^2\right]_0^5 = 75$ metros.

PARA PROFUNDIZAR

79. Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área. Si la división la llevan a cabo mediante la recta horizontal $y = a$. Calcula el valor de a.



La situación es la indicada en la figura y, puesto que el área de la parcela es $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$ u^2, hay que calcular el valor de a para que $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{2}{3}$, es decir, para que $\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{1}{3}$.

Así pues:

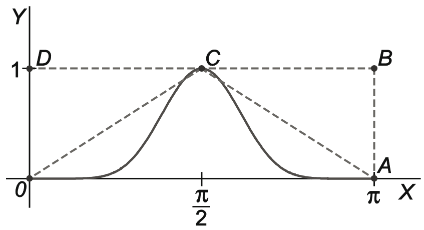
$$\int_0^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

80. Encuentra el intervalo [a, b] para el que la integral definida $\int_a^b\left(x-x^2\right)dx$ alcanza el máximo valor.

Como $f(x) = x - x^2$ es negativa si $x \in (-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$ y positiva si $x \in (0, 1)$, el intervalo buscado es [0, 1].

81. Cuatro estudiantes no se ponen de acuerdo sobre el valor de $\int_0^{\pi} \text{sen}^8\, x\, dx$. Alberto dice que vale π; Beatriz que es igual a $\frac{35\pi}{128}$; Carolina que vale $\frac{3\pi}{90}-1$; y David dice que vale $\frac{\pi}{2}$. Uno de los cuatro está en lo cierto, ¿quién?

Esbozando la gráfica de $f(x) = \text{sen}^8\, x$ en [0, π]se puede decidir quién tiene razón.



La integral $\int_0^{\pi} \text{sen}^8\, x\, dx$ mide el área de la zona bajo la curva, que, obviamente, es menor que el área del rectángulo $OABD$, es decir, es menor que π, por lo que Alberto no tiene razón.

De igual manera, aunque los segmentos OC y AC"comen" un poco de la región, claramente dejan la mayor parte de ella en el interior del triángulo OAC, de área $\frac{\pi}{2}$, por lo que la integral también es menor que $\frac{\pi}{2}$ y David no tiene razón.

Carolina está claramente equivocada, ya que su valor, $\frac{3\pi}{90}-1$, es negativo.

Así pues, es Beatriz la que acierta, el valor de la integral es $\frac{35\pi}{128}$.

82. Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

b) $\int 2^x\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt[5]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

d) $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

f) $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

a) Tipo 3 con $f(x) = \operatorname{arctg} x$, por tanto, $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = e^{\operatorname{arctg} x} + C$

b) Tipo 4, $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

c) Tipo 1, $\int \frac{\sqrt[5]{3+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int (3+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{5(3+\operatorname{tg} x)^{\frac{6}{5}}}{6} + C = \frac{5\sqrt[5]{(3+\operatorname{tg} x)^6}}{6} + C$

d) Tipo 9, $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx = \int \frac{2^x}{1+(2^x)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \cdot \ln 2}{1+(2^x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}(2^x)}{\ln 2} + C$

e) Tipo 1, $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx = -\int \cos^{-3} x \cdot (-\operatorname{sen} x)\,dx = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

f) Tipo 9, $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + C$

83. a) Halla dos números A y B tales que:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

b) Utilizando el resultado anterior, calcula:

$$\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx$$

a) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow A(x-2)+B(x-1) = 1$

Tomando en esta última igualdad $x = 1$ se obtiene $-A = 1 \Rightarrow A = -1$, tomando $x = 2$ se obtiene: $B = 1$.

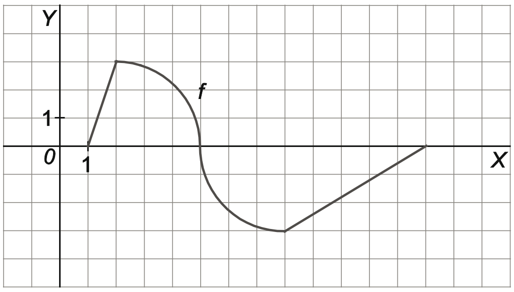
Por tanto, $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

b) Como $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, según el apartado anterior se tiene $\frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

Por tanto,

$$\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx = -3\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx = -3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

84. Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia.



Calcula:

a) $\int_1^{13} f(x)\,dx$ **b)** $\int_5^{13} f(x)\,dx$ **c)** $\int_2^{8} f(x)\,dx$

a) $\int_1^{13} f(x)\,dx = \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = \frac{3}{2} + \frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} - \frac{15}{2} = -6$

b) $\int_5^{13} f(x)\,dx = \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = -\frac{9\pi}{4} - \frac{15}{2} = \frac{-30-9\pi}{4}$

c) $\int_2^{8} f(x)\,dx = \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx = \frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = 0$

85. a) Encuentra tres números A, B y C tales que:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

b) Esboza la gráfica de f para $x > 0$.

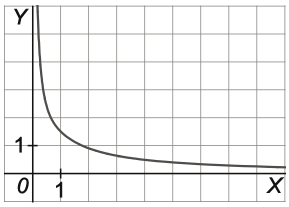
c) Encuentra el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

a) $\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x^3+x} \Rightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)x = 2x^2+1$

Tomando en esta última igualdad $x = 0$ se obtiene $A = 1$, tomando $x = -1$ y $x = 1$ se obtiene

$\begin{cases} 2A+B+C=3 \\ 2A+B-C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=1 \\ B-C=1 \end{cases} \Rightarrow B = 1, C = 0$. Por tanto, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$.

b) En $(0, +\infty)$ f es continua y positiva, tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, una asíntota vertical de ecuación $x = 0$ y es decreciente, ya que $f'(x) = \frac{4x(x^3+x)-(2x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{-2x^4-x^2-1}{(x^3+x)^2} < 0$ para todo x, con estos datos se puede esbozar la gráfica de f para $x > 0$.



c) $\text{Área} = \int_1^{e} f(x)dx = \int_1^{e} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^{e} = 1 + \frac{1}{2}\ln(e^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$ u².

ENTORNO MATEMÁTICO

El agrimensor

El padre de Julia y Julián es agrimensor, es decir, se dedica a medir la superficie de los terrenos y realizar los planos correspondientes a los mismos o, como sus hijos dicen, se dedica a medir tierras.

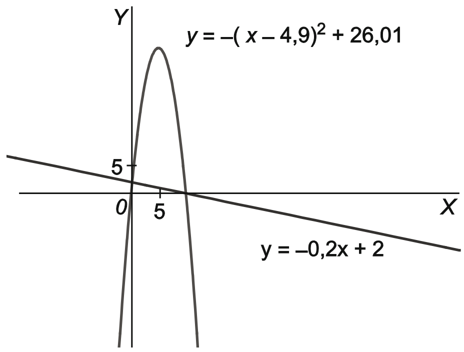
Un día, ambos entraron en el despacho de su padre mientras trabajaba. Encima de su mesa se encontraba la fotografía aérea de un bosque limitado por un río y una carretera y, dibujados sobre ella, unos ejes de coordenadas.

– Hola chicos, estoy intentando medir la superficie de este bosque, ¿queréis ayudarme? – les dijo el padre.

Los chicos se acercaron a la mesa con curiosidad.

– Fijaos – continuó el padre – al colocar de manera adecuada los ejes se puede observar que el río tiene forma de parábola.

– He colocado este papel cebolla – y no, no huele – encima del mapa, y he dibujado de forma aproximada una línea sobre el río y otra sobre la carretera que delimitan el bosque. He añadido además unos ejes en los que la unidad es 5 km, según me ha indicado la escala del mapa y, finalmente, al igual que hubierais hecho vosotros sin dificultad, he hallado las ecuaciones de la recta y la curva. Con esto ya puedo calcular la superficie del bosque.



¿Cuál es la superficie del bosque que están midiendo Julia, Julián y su padre?

Puntos de corte: $-0,2x+2=-(-x-4,9)^2+26,01 \Rightarrow x^2-10x=0 \Rightarrow x=0,\ x=10$

El área del bosque es, por tanto:

$$\int_0^{10}\left[-(x-4,9)^2+26,01-(-0,2x+2)\right]dx=\int_0^{10}\left(-x^2+10x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+5x^2\right]_0^{10}=\frac{500}{3}\simeq 166,67\ \text{km}^2$$

Aburrido en el atasco

Como cada fin de semana Carlos y su familia han ido al pueblo a descansar. El inconveniente que tiene tan relajante costumbre es que, como en la mayoría de las grandes ciudades, el domingo por la tarde se forman grandes atascos de entrada a la misma.

Carlos quiere ver el partido de liga que retransmiten esa tarde a las 19:30, por lo que han salido del pueblo con tiempo y a las 19:00 se encuentran a sólo 28 km de su casa y metidos en el atasco habitual.

Aburrido, o tal vez preocupado, Carlos empieza a hacer cálculos con el propósito de hacer más corta la espera y ya de paso intentar predecir si podrá ver el partido o no.

Recuerda haber visto en algún sitio, aunque no está seguro de si en un artículo de una revista de divulgación científica o en las noticias, que en las horas críticas, es decir, aquellas en las que el atasco es mayor, y que comprenden la franja que va desde las 19:00 hasta las 21:00, la velocidad que llevan los coches puede medirse con la ecuación $v(t)=10+\frac{1125}{18t+25}$ donde *t* se mide en minutos y $v(t)$ es la velocidad en km/h en el instante *t*.

a) ¿A qué velocidad iba el coche a las 7 de la tarde? ¿Y a las 7:30?

b) ¿Llegará a tiempo para ver el partido?

a) A las 19:00 la velocidad es $v(0)=55$ km/h, a las 19:30 es $v(30)\simeq 12$ km/h.

b) El espacio, en km, que recorren en *T* minutos es $\int_0^T \frac{v(t)}{60}dt$, por tanto, basta comprobarsi $\int_0^{30}\frac{v(t)}{60}dt \ge 28$, es decir, si $\int_0^{30} v(t)dt \ge 1680$. Como $\int_0^{30} v(t)dt=\left[10t+\frac{1125}{18}\ln(18t+25)\right]_0^{30}=300+62,5\ln 565-62,5\ln 25\simeq 494,87$, Carlos no llega a tiempo para ver el partido.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula la primitiva de la función $\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}$ que se anula para $x=1$.

Las primitivas son de la forma $F(x)=\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx=\ln|x|-2x^{-\frac{1}{2}}+C=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

Como $F(1)=0$ tenemos $0-2+C=0\Rightarrow C=2$, con lo que la primitiva buscada es $F(x)=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+2$.

2. Calcula las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int x^2(x-3)\,dx$ **b)** $\int -\text{sen}(3x)\,dx$

a) $\int x^2(x-3)\,dx=\int(x^3-3x^2)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3+C$

b) $\int -\text{sen}(3x)\,dx=-\frac{1}{3}\int 3\,\text{sen}(3x)\,dx=\frac{1}{3}\cos(3x)+C$

3. Halla las integrales indefinidas siguientes.

a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}+e^{2x}\right)dx$ **b)** $\int\frac{x+3}{x^2+6x-3}dx$

a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}+e^{2x}\right)dx=\int 1dx-\int x^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int 2e^{2x}=x+\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

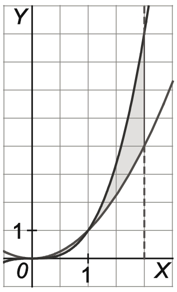
b) $\int\frac{x+3}{x^2+6x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x-3}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x-3\right|+C$

4. Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x=2$.

Las funciones se cortan si $x=0$ o $x=1$.

Como $f(x)\ge g(x)$ si $0\le x\le 1$ y $g(x)\ge f(x)$ si $1\le x\le 2$, el área pedida es:

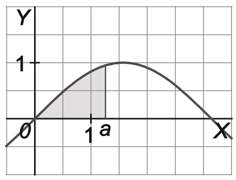
$$\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx+\int_1^2\left(x^3-x^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(\frac{1}{12}-0\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{3}{2}\ \text{u}^2$$



5. Calcula $a>0$ tal que el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\text{sen}\,x$, el eje $y=0$, y la recta $x=a$, sea $\frac{1}{2}$.

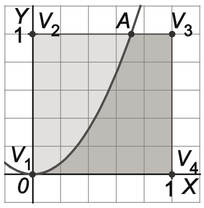
Como $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, debe ser $a<\frac{\pi}{2}$, por tanto:

$$\frac{1}{2}=\int_0^a\text{sen}\,x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^a=-\cos a+1\Rightarrow\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}$$



6. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $V_1 = (0,\ 0)$, $V_2 = (0,\ 1)$, $V_3 = (1,\ 1)$ y $V_4 = (1,\ 0)$ en dos recintos. Dibújalos y halla el área del recinto mayor.

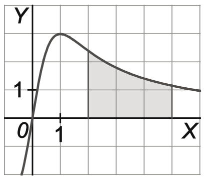
El punto de corte de $y = 2x^2$ con la recta $y = 1$ es $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, por tanto, el área del recinto superior es $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)\,dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0{,}47\ \text{u}^2$ y el área del recinto inferior es $1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0{,}53\ \text{u}^2$, con lo que el recinto mayor es el inferior.



7. Calcula el área encerrada entre $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$ y el eje de abscisas para $x \in [2,\ 5]$.

La función es positiva si $x > 0$, así, el área del recinto es:

$$\int_2^5 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\int_2^5 \frac{2x}{x^2+1}dx = 3\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_2^5 = 3(\ln 26 - \ln 5) \simeq 4{,}95\ \text{u}^2$$

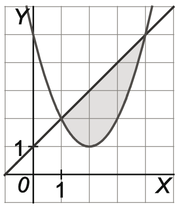


8. Dibuja la superficie limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ y la recta $y = x + 1$. Calcula el área de dicha superficie.

Puntos de corte: $x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 4$.

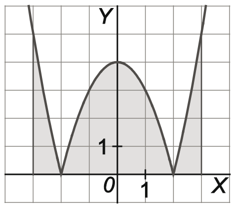
Si $1 \le x \le 4$ la recta está por encima de la parábola, por tanto, el área del recinto es:

$$\int_1^4 \left[(x+1) - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right]dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$$



9. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-3,\ 3]$ y calcula su integral.

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$ por tanto, el área del recinto es:



$$\int_{-3}^3 f(x)dx = 2\int_0^3 f(x)dx = 2\left(\int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx + \int_2^3 \left(x^2 - 4\right)dx\right) = 2\left(\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3\right) = \frac{46}{3}\ \text{u}^2.$$

10. Calcular el valor positivo de *a* para que se verifique: $\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{9}{2}$

$$\frac{9}{2} = \int_0^{a-1} (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + a - 1 = \frac{a^2 - 1}{2} \Rightarrow a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, entonces el valor de $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ es:

A. 0

B. 4

C. –1

D. No se puede calcular al ser *f* discontinua en $[0, 2\pi]$.

$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2 \cdot 2 = 4$, respuesta B.

2. Si *f* es la primitiva de la función $g(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ que toma el valor $-\frac{3}{2}$ en $x = 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ vale:

A. 0

B. $\frac{\pi}{4}$

C. 1

D. $-\frac{1}{6}$

La función $f(x)$ es de la forma: $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$

Como $f(0) = -\frac{3}{2}$ tenemos $C = -\frac{3}{2}$, así, $f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{3}{2}$ y, por tanto, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$, respuesta D.

3. ¿Cuál de las siguientes integrales no es igual a cero?

A. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$

B. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x\, dx$

C. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

D. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

La integral del apartado D no es cero ya que la función $f(x) = \cos^2 x$ no es nunca negativa, así que dicha integral mide un área y no puede ser cero.

El resto de las integrales son nulas, ya que todas son integrales en $[-\pi, \pi]$ de funciones impares.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si $M = \int_0^1 x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ y $N = \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$, entonces:

A. $M \geq 0$

B. $M \leq N$

C. $N \leq M$

D. $M \geq 1$

Sean $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x \operatorname{sen}^2 x$.

Como $0 < f(x) < 1$ en (0, 1), $0 = \int_0^1 0\, dx < \int_0^1 f(x)\, dx < \int_0^1 1\, dx = 1$, es decir, A es correcta, y D, no.

Como $f(x) - g(x) = x \operatorname{sen} x(x - \operatorname{sen} x) > 0$ en (0, 1), $\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = M - N > 0$, es decir, B es falsa y C correcta.

5. **Si** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 2t\, dt$ **, entonces:**

A. $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } t \cos t\, dt$

B. $I = 1$

C. $I = \left[\cos^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

D. $I > \frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 2t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{sen } 2t\, dt = \frac{1}{2}\left[-\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$, es decir, B es cierta, y D, no.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 2t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{sen } t \cos t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } t \cos t\, dt$, es decir, A es cierta.

$\left[\cos^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 1 = -1$, es decir, C es falsa.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea *f* una función continua en [*a*, *b*]. Considera las dos afirmaciones siguientes:**

1. $\int_a^b f(x)dx < 0$

2. $f(x) < 0$ **en todo el intervalo.**

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

Claramente $2 \Rightarrow 1$,pero $1 \not\Rightarrow 2$, ya que $\int_a^b f(x)dx$ puede ser negativa sin que $f(x)$ sea negativa en todo el intervalo, por ejemplo, basta considera $f(x) = x - 1$ en el intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Sea** $f(x) = a\,\text{sen}\, x + be^x + c\sqrt{x}$ **, de la que se sabe que en el punto de abscisa** $x = d$ **la gráfica de *f* presenta tangente horizontal. Para calcular** $\int_1^d f''(x)dx$ **se tienen los siguientes valores:**

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c*** **4. El valor de *d***

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

Sabemos que $f'(d) = 0$, además, como $f'(x) = a\cos x + be^x + \frac{c}{2\sqrt{x}}$ es una primitiva de $f''(x)$ tenemos $\int_1^d f''(x)dx = f'(d) - f'(1) = -\left(a\cos 1 + be + \frac{c}{2}\right)$, por lo que podemos eliminar el valor de *d*, respuesta D.