Tema 2. Potencias y raíces.

2.1. Operaciones con potencias.

2.1.1. Potencias de exponente entero.

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

Base: $a \in \mathbb{R}$
Exponente: $n \in \mathbb{N}$ número de veces que se multiplica la base

Ejemplo 1:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\quad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ $\quad -2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

Base: 2	Base: (-2)	Base: 2
Exponente: 3	Exponente: 3	Exponente: 3

Ejemplo 2:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$\frac{2^2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$ $\qquad -\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$

Propiedades:

$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$0^n = 0$
$1^n = 1$
$(-1)^n = \begin{cases} 1 & si \ \ n \ par \\ -1 & si \ \ n \ \ impar \end{cases}$

2.1.2. Potencias de exponente entero negativo.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ejemplos:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ $\quad -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$

b) $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$ $\quad (-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = -\frac{1}{5}$ $\quad -5^{-1} = -\frac{1}{5^1} = -\frac{1}{5}$

c) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ $\quad -3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$

$$\boxed{Si\ la\ base\ es\ una\ fracción: \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ $se\ lee\ fracción\ inversa\ de\ \frac{a}{b}\ \ que\ es\ \frac{b}{a}$: $\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{a\cdot b}{b\cdot a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$ $\quad$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{9}{25}$ $\quad$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 2^3 = 8$

d) $\left(-\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{7}\right)^{2} = \frac{4}{49}$ $\quad$ e) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{1}\right)^{3} = -64$ $\quad$ f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$

g) $-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{3}\right)^{2} = -\frac{25}{9}$ $\quad$ h) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = -\left(-\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8}$

2.1.3. Propiedades de las potencias.

a) Producto de potencias con la misma base.

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 2^{3+4} = 2^7$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \\ (-2)^5\cdot(-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128 \end{array}}$$

b) Cociente de potencias con la misma base.

$$5^7 : 5^5 = \frac{5^7}{5^5} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5^{7-5} = 5^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}} \\ (-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8 \end{array}}$$

c) Producto de potencias con el mismo exponente.

$2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \\ (-2)^3 \cdot (3)^3 = (-6)^3 = -216 \end{array}}$$

d) Cociente de potencias con el mismo exponente.

$$2^3 : 5^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n} \\ (-6)^3 : 3^3 = (-2)^3 = -8 \end{array}}$$

e) Potencia de una potencia.

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \\ [(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64 \end{array}}$$

2.2. Notación científica.

2.2.1. Notación científica para números grandes y pequeños.

Se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.

$1 U.A. = 1{,}5 \cdot 10^{11} m = 150.000.000.000\, m$

Masa electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$

Masa de una célula: $0{,}0000000000011 = 1{,}1 \cdot 10^{-12} kg$

Masa de la Luna: $M_L = 73490000000000000000000 = 7{,}349 \cdot 10^{22} kg$

2.2.2. Potencias de base 10.

$10^1 = 10$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$
$10^3 = 1000$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$
Etc.	Etc.

2.2.3. Números en notación científica.

Notación científica: $a{,}bcd... \cdot 10^n$, siendo $a \neq 0$

- Parte entera formada por una única cifra distinta de cero.
- Puede tener o no decimales.
- Una potencia de base 10 y exponente entero. El exponente indica el orden de magnitud.

Ejemplo: Poner en notación científica el número 3897000000000000

- Parte entera: 3,897
- Exponente de la potencia de diez: +15 (hay 16 dígitos no decimales, menos uno da quince)

El número en notación científica sería: $3{,}897 \cdot 10^{15}$

Ejemplo: Poner en notación científica el número 0,000000000003897

- Parte entera: 3,897
- Exponente de la potencia de diez: -12 (hay 12 dígitos decimales, hasta la cifra 3, incluyendo dicha cifra)

El número en notación científica sería: $3{,}897 \cdot 10^{-12}$

Ejemplo: Poner el número que representa $4{,}567 \cdot 10^{12}$

- Ponemos 4,567
- Movemos la coma hacia la derecha 12 lugares (después de la cifra 7 se añaden los ceros necesarios)

El número que queda es: 4567000000000

Ejemplo: Poner el número que representa $4{,}567 \cdot 10^{-12}$

- Ponemos 4,567
- Movemos la coma hacia la izquierda 12 lugares (después de la cifra 4 se añaden los ceros necesarios)

El número que queda es: 0,000000000004567

2.2.4. Operaciones con notación científica.

a) Producto y división.

Ejemplos:

a) $(5{,}24 \cdot 10^{6}) \cdot (6{,}3 \cdot 10^{8}) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

b) $\dfrac{5{,}24 \cdot 10^{6}}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317 \cdot 10^{14} = 8{,}317 \cdot 10^{13}$

RECUERDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

b) Suma y resta.

$$5{,}83 \cdot 10^{9} + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^{9} + 6932 \cdot 10^{9} - 75 \cdot 10^{9} = (5{,}83 + 6932 - 75) \cdot 10^{9} =$$
$$= 6862{,}83 \cdot 10^{9} = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$$

RECUERDA:

- ✓ Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.
- ✓ Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.
- ✓ Por último si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

2.3. Raíces de números reales.

2.3.1. Raíz cuadrada.

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{49} = \pm 7 \quad pues\ \ 7^2 = 49\ ; \quad también\ (-7)^2 = 49$

b) $\sqrt{25} = \pm 5 \quad pues\ \ 5^2 = 25\ ; \quad también\ (-5)^2 = 25$

c) $\sqrt{-121} = no\ existe\ pues\ \ x^2 \neq -121\ el\ cuadrado\ de\ un\ número\ no\ puede\ ser\ -$

2.3.2. Raíz de cualquier índice.

índice

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a}$$

radicando

El conjunto $\sqrt[n]{a}$ se llama radical.

Ejemplos.

a) $\sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^3 = 8$
b) $\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \Rightarrow \quad (-2)^3 = -8$
c) $\sqrt[4]{16} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^4 = 16$
d) $\sqrt[4]{-16}\ no\ existe \quad \Rightarrow \quad x^4 \neq -16\ \ si\ el\ exponente\ es\ par\ el\ resultado\ no\ puede\ ser\ -$

2.3.3. Número de raíces.

RADICANDO	ÍNDICE	Nº RAÍCES REALES	EJEMPLO
$a > 0$ positivo	PAR	2	$\sqrt{25} = \pm 5$ ya que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$ $\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad 3^4 = 81\ \ y\ \ (-3)^4 = 81$
	IMPAR	1	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$
$a < 0$ negativo	PAR	0	$\sqrt{-25}$ no existe
	IMPAR	1	$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$
$a = 0$	PAR	1	$\sqrt[4]{0} = 0$
	IMPAR	1	$\sqrt[3]{0} = 0$

2.3.4. Potencias de exponente fraccionario.

La raíz de índice *n* puede expresarse como una potencia de exponente racional: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Ejemplos: a) $\sqrt{a} = a^{1/2}$
b) $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$

En general: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Ejemplos: a) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{3/4}$
b) $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{2/3}$
c) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/5}$

2.3.5. Radicales equivalentes.

Dos radicales son equivalentes cuando valen lo mismo.

$$a^{n/m} = a^{n\cdot k/m\cdot k} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

Para obtener radicales equivalentes se multiplica el índice y el exponente del radicando por el mismo número.

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[6]{7^4} = \sqrt[9]{7^6}$
b) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[12]{5^6}$
c) Simplificar el radical: $\sqrt[15]{2^6} = \sqrt[5]{7^2}$
d) Simplificar el radical: $\sqrt[3]{7^9} = 7^{9/3} = 7^3$

2.4. Operaciones con radicales.

2.4.1. Reducir a índice común. Comparar radicales.

Reducir a índice común:
- Calcular el m.c.cm de los índices.
- Determinar radicales equivalentes con el mismo índice común.

Ejemplo: $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{8}$

Índice común: mcm(4, 6) = 12
$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4\cdot 3]{7^3} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$

$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6\cdot 2]{8^2} = \sqrt[12]{8^2} = \sqrt[12]{64}$

Ordenar radicales:

- Si tienen el mismo índice es mayor el que tiene mayor radicando.
-

$$\sqrt[4]{6} > \sqrt[4]{4}$$

- Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

¿$\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{8}$?

$\sqrt[12]{343} > \sqrt[12]{64}$ por tanto, $\sqrt[4]{7} > \sqrt[6]{8}$

2.4.2. Producto y cociente de radicales.

Producto: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{35}$

Si no tienen el mismo índice, se reducen a índice común.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$

mcm(2, 3) = 6

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2}$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}$$

División: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplo 1. $\sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 : 5} = \sqrt[3]{5}$

Ejemplo 2. $\frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^2}} = \sqrt[4]{\frac{7^3}{7^2}} = \sqrt[4]{7}$

2.4.3. Potencia de un radical.

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\frac{\left(2^8\cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4\cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

2.4.4. Raíz de un radical.

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4\cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}\cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

2.4.5. Extraer e introducir factores en un radical.

Extraer factores:

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

1 Un **exponente** es **menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

3 Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2\sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Introducir factores:

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3\sqrt[4]{6}$$

$$= \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

2.4.6. Sumar y restar radicales.

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Ejemplos:

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

- Material libre de internet: matematicasonline.es
- Libro Savia SM.