7 Representación de funciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. En cada caso, obtén el dominio, los cortes con los ejes y el signo.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4x}$ **e)** $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x-2}}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+6}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+1}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$

a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Eje X: Resolviendo la ecuación $x^2+x=0$ obtenemos los puntos de corte con el eje de abscisas: $A(0,0)$, $B(-1,0)$.

Eje Y: El punto de corte con el eje de ordenadas es $A(0,f(0))=A(0,0)$.

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $\dfrac{x^2+x}{2}>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-1,0) \end{cases}$

b) Dominio: El denominador se anula en $x=-6$ y el radicando no puede ser negativo, $3-x\geq 0$ $\Rightarrow D(f)=(-\infty,-6)\cup(-6,3]$

Eje X: Resolviendo la ecuación $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+6}=0$ obtenemos el punto de corte con el eje de abscisas $A(3,0)$.

Eje Y :El punto de corte con el eje de ordenadas es $B(0,f(0))=A\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+6}>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-6,3) \\ f<0, \text{si } x\in(-\infty,-6) \end{cases}$

c) Dominio: El denominador se anula en $x=-4$ y en $x=0$ $\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-4,0\}$

Eje X: Resolviendo la ecuación $\dfrac{x+1}{x^2+4x}=0$ obtenemos el punto de corte con el eje de abscisas: $A(-1,0)$

Eje Y : Como $0\notin D(f)$ la función no corta al eje de ordenadas.

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $\dfrac{x+1}{x^2+4x}>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-4,-1)\cup(0,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-\infty,-4)\cup(-1,0) \end{cases}$

d) Dominio: El denominador no se anula y el radicando no puede ser negativo $x-1\geq 0$ $\Rightarrow D(f)=[1,+\infty)$.

Eje X: Resolviendo la ecuación $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+1}=0$ obtenemos el punto de corte con el eje de abscisas: $A(1,0)$

Eje Y : Como $0\notin D(f)$ la función no corta al eje de ordenadas.

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+1}>0$, obteniéndose que: $f>0, \text{si } x\in(1,+\infty)$

e) Dominio: Para que los radicandos sean positivos debe ser $0 \le x-2 \le 9 \;\Rightarrow D(f)=[2,11]$.

Eje X: Resolviendo la ecuación $\sqrt{3-\sqrt{x-2}}=0$ obtenemos el punto de corte con el eje de abscisas: $A(11,0)$,.

Eje Y: Como $0 \notin D(f)$ la función no corta al eje de ordenadas.

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $\sqrt{3-\sqrt{x-2}}>0$, obteniéndose que: $f>0, \text{si } x \in [2,11)$

f) Dominio: Para que los radicandos sean positivos debe ser $x-1 \ge 0$ y $1-x \ge 0 \Rightarrow D(f)=\{1\}$.

Eje X: Resolviendo la ecuación $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=0$ obtenemos el punto de corte con el eje de abscisas: $A(1,0)$.

Eje Y: Como $0 \notin D(f)$ la función no corta al eje de ordenadas.

Como el $D(f)=\{1\}$ y $f(1)=0$ no tiene sentido estudiar el signo de la función.

4. Indica los puntos de discontinuidad, singulares y críticos para las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{5}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2+4}$ **c)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$. Como $f'(x)=\dfrac{3}{5}x^2-\dfrac{6}{5}x$ se anula en $x=0$ y $x=2$ tiene dos puntos singulares y no hay más puntos críticos que los singulares

b) El denominador de la función se anula en $x=-2 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ y tiene una discontinuidad en $x=-2$.

La función f tiene dos puntos singulares, $x=0$ y $x=-\dfrac{2}{3}$ ya que $f'(x)=\dfrac{-3x^2-2x}{\left(x^3+x^2+4\right)^2}$ se anula para esos dos valores. Además como f' no es continua en $x=-2$ no hay más puntos críticos que los singulares.

c) Resolvemos $\dfrac{x}{x^2-4} \ge 0 \Rightarrow D(f)=(-2,0]\cup(2,+\infty)$. La función f no tiene puntos singulares, ya que $f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{\left(2x^4-16x^2+32\right)}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x}}$ no se anula en el dominio.

5. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=1+\dfrac{1+x^2}{x^4}$ **c)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **e)** $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-|x|+x}{x^4+2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

a) Como $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ la función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) Como $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-|-x|-x}{(-x)^4+2}=\dfrac{x^2-|x|-x}{x^4+2}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$ la función no presenta simetría.

c) Como $f(-x)=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ la función presenta simetría respecto del origen de coordenadas O.

d) Como $f(-x)=\dfrac{-2x}{-x+1}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$ la función no presenta simetría.

e) Como $f(-x)=\ln\left((-x)^2\right)=\ln\left(x^2\right)=f(x)$ la función presenta simetría respecto del eje de ordenadas.

f) Como $f(-x)=\dfrac{-x}{1-|-x|}=\dfrac{-x}{1-|x|}=-f(x)$ la función presenta simetría respecto del origen de coordenadas O.

6. Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, indica el período.

a) $f(x)=\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **b)** $f(x)=1+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **e)** $f(x)=x+\text{sen}x$

a) $f(x)=\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)=\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}+2\pi\right)=\text{sen}\left(\dfrac{x+6\pi}{3}\right)=f(x+6\pi)\Rightarrow$ la función es periódica con periodo $T=6\pi$.

b) $f(x+\pi)=1+\dfrac{1}{\cos^2(x+\pi)}=1+\dfrac{1}{(-\cos x)^2}=1+\dfrac{1}{\cos^2 x}=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con periodo $T=\pi$.

c) Como $f(x+T)=x+T+\text{sen}(x+T)\neq x+\text{sen}x=f(x)$ para $T\neq 0$ la función no es periódica.

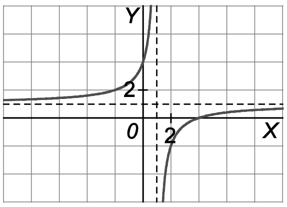
7. Ejercicio resuelto.

8. Halla las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas, de las siguientes funciones y úsalas para trazar aproximadamente sus ramas infinitas.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

a) Asíntotas verticales: La función presenta dos puntos de discontinuidades: $x=-4$ y $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{8}{5}\\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{8}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$



La función tiene una discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{-15}{0^-}\right]=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{-15}{0^+}\right]=-\infty$, puede asegurarse que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=1\Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=1\Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por ser función racional y tener asíntotas horizontales.

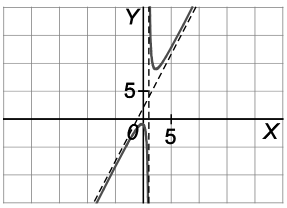
b) Asíntotas verticales: La función presenta un único punto de discontinuidad: $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\left[\dfrac{3}{0^-}\right]=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\left[\dfrac{3}{0^+}\right]=+\infty$, puede asegurarse que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

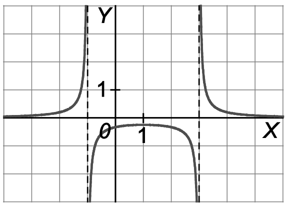
Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas: $\left\{\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}:x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}=2\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=2\end{array}\right.$

Así, la ecuación de la asíntota es $y=2x+2$.



c) Asíntotas verticales: $x=-1$ y $x=3$



$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-2x-3}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-2x-3}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-2x-3}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty\ ;\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x^2-2x-3}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

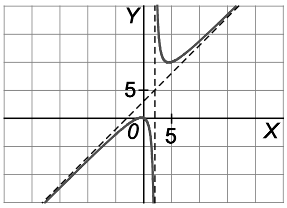
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=0\Rightarrow y=0$

Asíntotas oblicuas: No tiene por ser función racional y tener asíntotas horizontales.

9. Determina las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}$

a) Asíntotas verticales: La función presenta dos puntos de discontinuidades: $x=1$ y $x=2$



$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x+3)}{(x-2)}=-4$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x+3)}{(x-2)}=-4$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

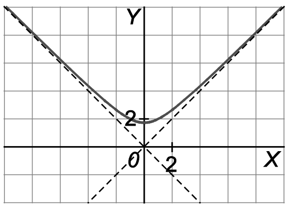
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{10}{0^-}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{10}{0^+}\right]=+\infty$, puede asegurarse que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas:
$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}:x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-3x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-5x}{x^2-3x+2}=5\end{cases}\Rightarrow y=x+5$$

b) Asíntotas verticales: No tiene porque el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: no tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

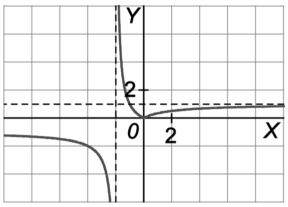


Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right)=1$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

Así, la recta $y=x$ es asíntota oblicua de f en $+\infty$ y, al ser par, $y=-x$ será su asíntota oblicua en $-\infty$.

c) Asíntotas verticales: $x=-2$; $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{|x|}{x+2}=\left[\dfrac{2}{0^-}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{|x|}{x+2}=\left[\dfrac{2}{0^+}\right]=+\infty$



Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x}{x+2}=-1\Rightarrow y=-1$ es una asíntota horizontal en $-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|x|}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x+2}=1\Rightarrow y=1$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

10. Ejercicio interactivo.

11. Ejercicio resuelto.

12. Estudia los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de las funciones siguientes y esboza su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{6x^2-x^4}{8}$

b) $f(x)=x^3-7x^3+16x-13$

c) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

d) $f(x)=3x^5-5x^3$

a) Calculamos los puntos que anulan f' : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{2}=0\Rightarrow x=0, x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a 0	0 a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+	–
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$, decrece en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, $\left(-\sqrt{3},\dfrac{9}{8}\right)$ y $\left(\sqrt{3},\dfrac{9}{8}\right)$ son máximos relativos y $(0,0)$ es un mínimo relativo.

b) Calculamos los puntos que anulan f' : $f'(x)=3x^2-14x+16=0\Rightarrow x=2, x=\dfrac{8}{3}$

	$-\infty$ a 2	2 a $\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$ a $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Así, f crece en $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{8}{3},+\infty\right)$, decrece en $\left(2,\dfrac{8}{3}\right)$, $(2,-1)$ es el máximo relativo y $\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{31}{27}\right)$ mínimo relativo.

c) Calculamos los puntos que anulan f' : $f'(x)=3x^2-12x+9=0\Rightarrow x=1, x=3$

	$-\infty$ a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, decrece en $(1,3)$, $(1,6)$ es el máximo relativo y $(3,2)$ el mínimo relativo.

d) Calculamos los puntos que anulan f' : $f'(x)=15x^4-15x^2=0\Rightarrow x=-1, x=0, x=1$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$f'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

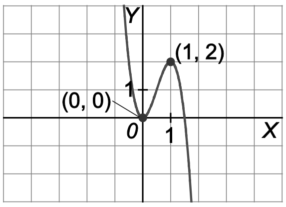
Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, decrece en $(-1,1)$, presenta un máximo relativo en $(-1,2)$ y un mínimo relativo en $(1,-2)$.

13. Si $f(x)=ax^3+bx^2+c$ pasa por $(0,0)$ y tiene un máximo local en $(1,2)$; calcula y representa *f*.

Pasa por $(0,0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow c=0$

Tiene un máximo en $(1,2)\Rightarrow \begin{cases} f(1)=2\Rightarrow a+b=2 \\ f'(1)=0\Rightarrow 3a+2b=0 \end{cases}\Rightarrow a=-4, b=6$

La función es $f(x)=-4x^3+6x^2$.



14. Calcula los valores de *a* .y *b* para que $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-6x$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1,-3)$.

Presenta un punto de inflexión en $(1,-3)\Rightarrow \begin{cases} f(1)=-3\Rightarrow 1+a+b-6=3\Rightarrow a+b=8 \\ f''(1)=0\Rightarrow 12+6a+2b=0\Rightarrow 6a+2b=-12 \end{cases}\Rightarrow a=-7, b=15\Rightarrow$

La función es $f(x)=x^4-7x^3+15x^2-6x$.

15. Ejercicio resuelto.

16. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{(-x-3)^2}{-x-3}=\dfrac{(x+3)^2}{-x-3}\neq\begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}\Rightarrow$ No presenta simetría.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: $\dfrac{(x-3)^2}{x-3}=0\Rightarrow$ no se anula en su dominio.

Eje *Y*: $(0,f(0))=(0,-3)$. Además, $f<0$ si $x\in(-\infty,3)$ y $f>0$ si $x\in(3,+\infty)$

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{(x-3)^2}{x-3}=0$ y $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{(x-3)^2}{x-3}=0\Rightarrow$ tiene una discontinuidad evitable en $x=3$.

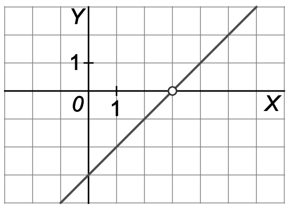
Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas: $\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x-3}:x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2}{x^2-3x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-3x+9}{x-3}\right)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow y=x-3$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=1>0\Rightarrow f$ es creciente, no tiene puntos críticos ni máximos ni mínimos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=0\Rightarrow f$ no presenta curvatura.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



b) 1.º Dominio y continuidad: $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1, x=1 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow f$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x=0$ Eje *Y*: $x=0 \Rightarrow f(0)=0$ El único punto de corte es el $(0,0)$.

El signo de *f* cambia en las raíces del numerador y del denominador y se muestra en la tabla.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: En $x=-1, x=1$:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas:
$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}:x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=x$$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3}, x=0, x=\sqrt{3}$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↘	↗

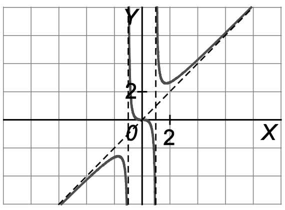
Así, $f(x)$ crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, decrece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$, presenta un máximo relativo en $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se da el resultado y se deduce que el punto $(0,0)$ es un punto de inflexión.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



c) 1.º Dominio y continuidad: $x^2+1\neq 0 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}$ **.** Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-f(x)\Rightarrow f$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo Eje X: $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0\Rightarrow x=0$ Eje Y: $(0,f(0))=(0,0)$. El signo de f cambia en las raíces del numerador y del denominador y se muestra en la tabla

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: No tiene, ya que su dominio son todos los números reales y no presenta discontinuidades.

Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas: $$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}:x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{La asíntota oblicua es } y=x$$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=0$

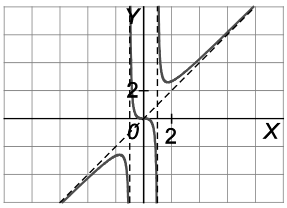
	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	↗	↗	

Así, $f(x)$ crece en $\mathbb{R}$ y no tiene ni máximos ni mínimos relativos, aunque el punto $(0,0)$ es un punto singular**.**

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Rightarrow x=-\sqrt{3}, x=0, x=\sqrt{3}$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	

En la tabla se da el resultado y se deduce que el punto $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ son los puntos de inflexión.



8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:

17. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax-2}{x^2-9}$, calcula el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x=-1$.

Para que tenga un extremo relativo en $x=-1$ se tiene que cumplir que $f'(-1)=0\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{-ax^2-9a+4x}{\left(x^2-9\right)^2}$.

$$f'(-1)=\dfrac{-a-9a-4}{(-8)^2}=0\Rightarrow -10a-4=0\Rightarrow a=-\dfrac{2}{5}$$

18. Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$. Realiza un estudio completo de la misma y represéntala.

1.º Dominio y continuidad: $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. Estudiemos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=-3\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-3}{x+1}=-3\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x^2+2x-3=-3\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ es continua en su dominio.}$$

2.º Simetría: No presenta ninguna simetría.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje *X*: $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1}=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\notin(-\infty,0]\\ x^2+2x-3=0\Rightarrow x=-3\notin(0,+\infty), x=1\end{cases}\Rightarrow(1,0)$

Eje *Y*: $x=0\Rightarrow f(0)=-3\Rightarrow(0,-3)$

El signo de *f* cambia en las raíces del numerador y del denominador y se muestra en la tabla:

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$f(x)$	+	−	+

5.º Asíntotas

Asíntotas verticales: En $x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=2\Rightarrow y=2\Rightarrow$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+2x-3=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{(x+1)^2} & \text{si } x<0\\ 2x+2 & \text{si } x>0\end{cases}\Rightarrow x=-1, x=0$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗	↗	↗

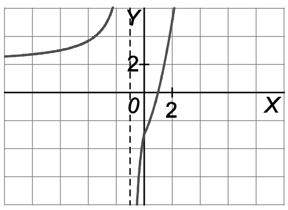
Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$, y no presenta ni máximos ni mínimos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-10}{(x+1)^3} & \text{si } x<0\\ 2 & \text{si } x>0\end{cases}\Rightarrow x=-1, x=0$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

En la tabla se da el resultado y se deduce que el punto $(0,-3)$ cambia la curvatura.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



19. Ejercicio resuelto.

20. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

b) $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}$

a) 1.º Dominio y continuidad: El radicando no puede ser negativo $x^2-4\geq 0 \Rightarrow D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría: $f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)\Rightarrow f$ es simétrica respecto del eje de ordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: $\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow B(-2,0),C(2,0)$

Eje *Y*: No corta al no estar $x=0$ en el dominio.

La función *f* es siempre positiva salvo en los puntos *B* y *C*, donde corta al eje de abscisas.

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: No tiene al no haber puntos en el dominio en el que la función tienda a ±∞.

Asíntotas Horizontales: no tiene, ya que los límites en +∞ y en -∞ son iguales a +∞

Asíntotas oblicuas:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$$

La asíntota oblicua de f en $+\infty$ es $y=x$, y por ser par la asíntota oblicua de f en $-\infty$ es $y=-x$.

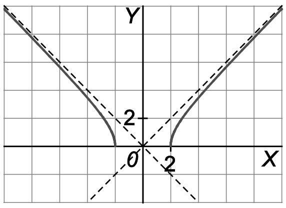
6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ que no se anula en $D(f)$ por lo que no hay extremos relativos.

	$-\infty$ … -2	-2 … 2	2 … $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

Así, $f(x)$ crece en $\mathbb{R}$ y no tiene ni máximos ni mínimos relativos, aunque el punto $(0,0)$ es un punto singular.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}<0$ en su dominio luego es cóncavo hacia abajo.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función



b) 1.º Dominio y continuidad: El radicando no puede ser negativo $3-2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow D(f)=[-3,1]$.

2.º Simetría. $f(-x)=1-\sqrt{3+2x-x^2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow f$ no presenta simetría respecto del eje de ordenadas ni respecto del origen.

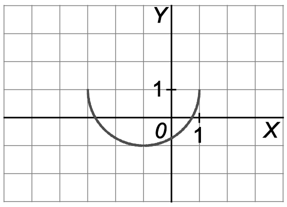
4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $1-\sqrt{3-2x-x^2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3}-1, x=\sqrt{3}-1 \Rightarrow B\left(-\sqrt{3}-1,0\right), C\left(\sqrt{3}-1,0\right)$ Eje Y: $\left(0,f(0)\right)=\left(0,1-\sqrt{3}\right)$

	-3	$-\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}-1$	1
$\boldsymbol{f(x)}$		+	−	+

5.º Asíntotas: Asíntotas verticales: No tiene al no haber puntos en el dominio en el que la función tienda a $\pm\infty$

Asíntotas horizontales y oblicuas: no tiene, ya que $D(f)=[-3,1]$.



6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}=0 \Rightarrow x=-1$

	-3	-1	1
$\boldsymbol{f'(x)}$		−	+
$\boldsymbol{f(x)}$		↘	↗

Así, $f(x)$ crece en $(-1,1)$, decrece en $(-3,-1)$ y tiene un mínimos relativo en el punto $(-1,-1)$.

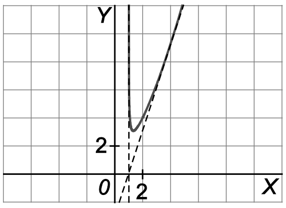
7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-4}{\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{-x^2-2x+3}}>0$ luego es cóncava hacia arriba.

21. Haz un estudio sobre $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}}$ y represéntala.

1.º Dominio y continuidad: El radicando no puede ser negativo $x-1>0 \Rightarrow D(f)=(1,+\infty)$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: La función *f* es siempre positiva en su dominio.

Eje X: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=0 \Rightarrow x=0 \notin D(f)$ Eje Y: No corta al eje Y.



5.º Asíntotas. Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty \Rightarrow x=1$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=+\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}:x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x-1}}=+\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{3x^2-4x}{(2x-2)\sqrt{x-1}}=0 \Rightarrow x=0 \notin D(f), x=\dfrac{4}{3}$

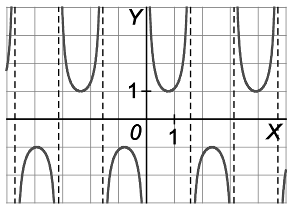
	1	$\frac{4}{3}$
$\boldsymbol{f'(x)}$	−	+
$\boldsymbol{f(x)}$	↘	↗

Así, $f(x)$ decrece en $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$ y tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{16\sqrt{3}}{9}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{3x^2-8x+8}{\left(4x^2-8x+4\right)\sqrt{x-1}}>0$ en su dominio luego es cóncava hacia arriba.

22. Ejercicio resuelto

23. Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$.



1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

2.º Simetría: $f(-x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2(-x))}=\dfrac{1}{-\operatorname{sen}(2x)}=-f(x)\Rightarrow f$ tiene simetría impar.

3.º Periodicidad: $f(x+\pi)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2(x+\pi))}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x+2\pi)}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}=f(x)\Rightarrow f$ es una función periódica con periodo π. Por tanto sólo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0,\pi]$ y generalizar los resultados a $\mathbb{R}$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: -, $f>0$ si x $\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $f<0$ si x $\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ La función no corta a los ejes.

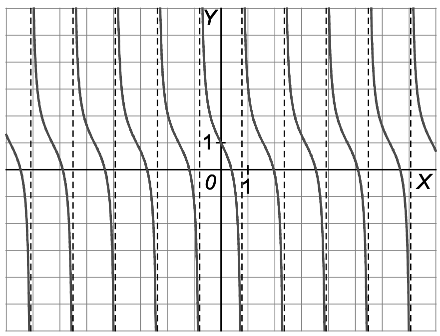
5.º Asíntotas verticales:

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=-\infty\Rightarrow x=0, x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-2\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow f$ crece en $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ y decrece en $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ y $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ es su mínimo relativo y $\left(\dfrac{3\pi}{4},-1\right)$ es su máximo relativo**.**

7.º Puntos de inflexión y concavidad: es cóncava hacia arriba en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ cóncava hacia abajo.

24. Haz un estudio representa la gráfica de la función $f(x)=1-\operatorname{tg}(2x)$.



1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{4}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

2.º Simetría:

$f(-x)=1-\operatorname{tg}(2(-x))=1-(-\operatorname{tg}(2x))=1+\operatorname{tg}(x)\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow$ f no presenta simetría.

3.º Periodicidad: $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\operatorname{tg}(2x+\pi)=1-\operatorname{tg}(2x)=f(x)\Rightarrow f$ es una función periódica con periodo $\dfrac{\pi}{2}$.

Realizaremos el estudio en el intervalo $\left(\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ y generalizaremos los resultados.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $1-\operatorname{tg}(2x)=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{8}\Rightarrow B\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$ Eje Y: $A(0,f(0))=(0,1)$, $f>0$ en $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{8}\right)$ y $f<0$ en $\left(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{4}\right)$

5.º Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x)=-\infty\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{4}$, son las asíntotas verticales.

6.º Puntos singulares y crecimiento $f'(x)=-2\left(1+\operatorname{tg}^2(2x)\right)<0\Rightarrow f$ es decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=-8\operatorname{tg}(2x)\left(\operatorname{tg}^2(2x)+1\right)\Rightarrow x=0$

	$-\dfrac{\pi}{4}$ … 0	0 … $+\dfrac{\pi}{4}$
$f''(x)$	+	–
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Es cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ y en $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ cóncava hacia abajo. En $(0,1)$ hay un punto de inflexión.

25. Ejercicio resuelto.

26. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones exponenciales.

a) $f(x) = xe^{x}$ **b)** $f(x) = e^{-x^2}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría: $f(-x) = -xe^{-x} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow f$ no tiene simetría respecto del origen de coordenadas ni respecto del eje de ordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $xe^{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ Eje Y: $A(0, f(0)) = (0,0)$

El signo de *f* cambia en las raíces y se muestra en la tabla:

	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: No tiene ya que su dominio son todos los números reales y no presenta discontinuidades.

Asíntotas horizontales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = -\infty e^{-\infty} = \dfrac{-\infty}{e^{\infty}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty e^{+\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{x}}{x} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntota oblicua.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = (x+1)e^{x} = 0 \Rightarrow x = -1$

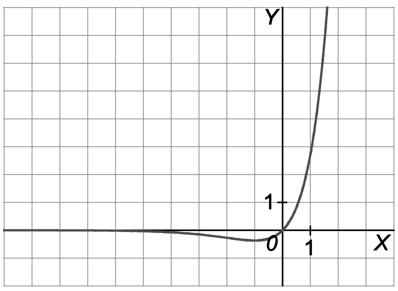
	$-\infty$ … -1	-1 … $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Así, $f(x)$ decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, \infty)$ y tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = (x+2)e^{x} = 0 \Rightarrow x = -2$

	$-\infty$ … -2	-2 … $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y es cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$ y $\left(-2, \dfrac{-2}{e^2}\right)$ es el punto de inflexión.



b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ **.** Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)\Rightarrow f$ es simétrica respecto del respecto del eje de ordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $e^{-x^2}=0\Rightarrow$ no tiene solución, no corta al eje de abscisas y la función siempre es positiva.

Eje Y: $(0,f(0))=(0,1)$

5.º Asíntotas

Asíntotas verticales: No tiene ya que su dominio son todos los números reales y no presenta discontinuidades.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=\frac{1}{e^{\infty}}=0\Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$**.**

Asíntotas oblicuas: no tiene por tener asíntotas horizontales

6.º Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0\Rightarrow x=0$

	$-\infty$ — 0	0 — $+\infty$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,\infty)$ y tiene un máximo relativo en el punto $(0,1)$**.**

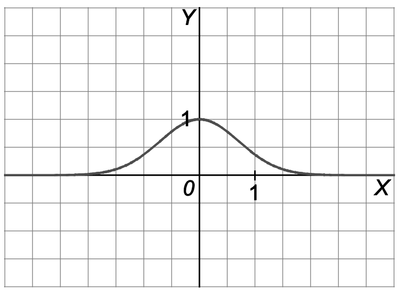
7.º Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x)=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}=0\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2},x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$-\infty$ — $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $+\infty$
$f''(x)$	+	–	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ y es cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y tiene dos puntos de inflexión $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



27. Representa la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4}{1+e^{-x}}$ **b)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ **.** Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{4}{1+e^{x}}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow f$ no tiene simetría par ni impar.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\dfrac{4}{1+e^{-x}}=0\Rightarrow$ No tiene solución y $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Eje Y: $A(0,f(0))=(0,2)$

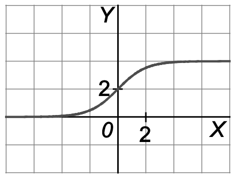
5.º Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{1+e^{-x}}=\dfrac{4}{e^{\infty}}=0\Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{1+e^{-x}}=\dfrac{4}{1}=4\Rightarrow y=4$ es la asíntota horizontal en $+\infty$.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{4e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}>0\Rightarrow f$ es creciente y no tiene ni máximos ni mínimos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{4e^{-2x}-4e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^3}=0\Rightarrow x=0$ La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$ y es cóncava hacia abajo en $(0,+\infty)$ y $(0,2)$ es el punto de inflexión.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{1}{2}^{(-x)^2-1}=\dfrac{1}{2}^{x^2-1}=f(x)\Rightarrow f$ es simétrica respecto del respecto del eje de ordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje Y: $A(0,f(0))=A(0,2)$

Eje X: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}=0\Rightarrow$ no tiene solución, no corta al eje de abscisas y la función siempre es positiva.

5.º Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}=0\Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$.

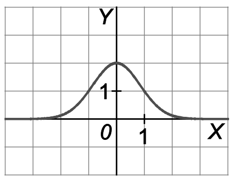
6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=-2\ln(2)x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}=0\Rightarrow x=0$

	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,\infty)$ y tiene un máximo relativo en el punto $(0,2)$**.**

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=2\ln2\left(2x^2\ln2-1\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}=0\Rightarrow .\ x=-\dfrac{\sqrt{2\ln2}}{2\ln2}\simeq-0{,}85,$ $x=\dfrac{\sqrt{2\ln2}}{2\ln2}\simeq0{,}85.$ La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-0{,}85)\cup(0{,}85,+\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-0{,}85;\,0{,}85)$ puntos de inflexión $(-0{,}85;\,1{,}21)$ y $(0{,}85;\,1{,}21)$.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



28. Ejercicio resuelto.

29. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x\ln x$ **b)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f) = (0, +\infty)$. Es continua en su dominio.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo Eje X: $x\ln x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f), \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1,0)$

	0	1	$+\infty$
$\boldsymbol{f(x)}$	$-$	$+$	

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \Rightarrow$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x}{x} = \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntota oblicua.

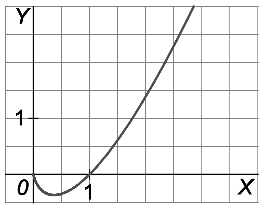
6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$-$	$+$	
$\boldsymbol{f(x)}$	$\searrow$	$\nearrow$	

Así, $f(x)$ decrece en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$ y tiene un mínimo absoluto en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f) = (0, +\infty)$. Es continua en su dominio.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $\dfrac{\ln x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1,0)$. Además $f < 0$ si $x \in (0,1)$ y $f > 0$ si $x \in (1, +\infty)$

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{e^x} = -\infty \Rightarrow x = 0$ es la asíntota vertical.

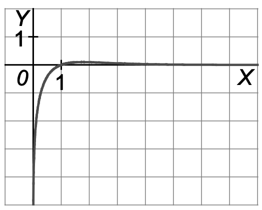
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es la asíntota horizontal.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-x\ln x + 1}{xe^x} = 0 \Rightarrow$ Esta ecuación daría la posición del máximo de la función pero no es fácil de resolver.

7.º Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = \dfrac{x^2\ln x - 2x - 1}{x^2e^x} = 0 \Rightarrow$ Esta ecuación daría la posición del punto de inflexión de la función pero no es fácil de resolver.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



30. Representa la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ **b)** $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: No corta a los ejes pero su signo viene dado por la siguiente tabla:

	0 — 1	1 — $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty\Rightarrow x=1$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.

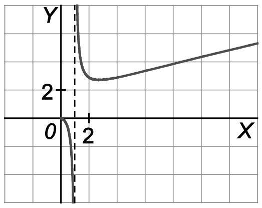
Asíntotas oblicua: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}:x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicua.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=0\Rightarrow x=e\Rightarrow(e,e)$ es un mínimo relativo.

	0 — 1	1 — e	e — $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↗

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-\ln x+2}{x\ln^3 x}=0\Rightarrow x=e^2\Rightarrow\left(e^2,\dfrac{e^2}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

	0 — 1	1 — e^2	e^2 — $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$



b) 1.º Dominio y continuidad: $\dfrac{x}{x-1}>0\Rightarrow D(f)=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=0\Rightarrow\dfrac{x}{x-1}=1\Rightarrow$ no tiene solución, y como $0\notin D(f)$ la función no corta a los ejes aunque cambia de signo.

	$-\infty$ — 0	0 — 1	1 — $+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$

5.º Asíntotas:

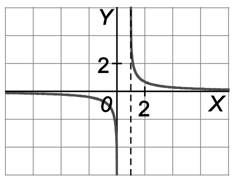
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\ln1=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\ln1=0\Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\ln(+\infty)=+\infty\Rightarrow x=0, x=1$ son asíntotas verticales.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2-x}<0$ en el dominio de la función con lo que la función siempre es decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{2x-1}{x^4-2x^3+x^2}=0\Rightarrow$ No tiene puntos de inflexión en el dominio.

	$-\infty$ — 0	0 — 1	1 — $+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$



31 y 32. Ejercicios resueltos.

33. Las funciones de oferta y demanda en función del precio de un producto son, respectivamente:

$$O(p) = 2p - 10 \qquad\qquad D(p) = \frac{2800}{p}$$

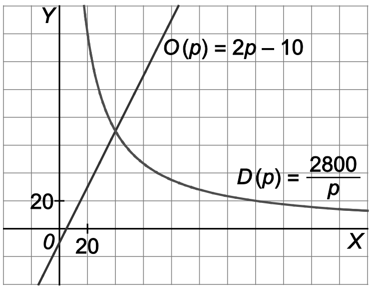
a) Encuentra el punto de equilibrio y da el precio y el número de unidades correspondientes.

b) Dibuja las gráficas de las funciones de oferta y demanda sobre los mismos ejes de coordenadas.

c) ¿Dónde corta la gráfica de la oferta al eje de abscisas? Explica qué significado económico tiene ese punto.

a) Igualando ambas expresiones y resolviendo la ecuación resultante: $2p - 10 = \frac{2800}{p} \Rightarrow p = 40, p = -35 \Rightarrow$ el último resultado no tiene sentido, luego el punto de equilibrio es (40,70), el precio es de 40 unidades monetarias y el número de unidades es 70.

b)



c) $2p - 10 = 0 \Rightarrow p = 5$ si el precio del producto es menor que 5, no hay oferta; si el precio es 5, la oferta es nula, y si es mayor que 5, la oferta será positiva.

34. El tipo de interés anual, *I* (*t*) en %, ofrecido por un banco depende del tiempo, *t*, en años, que se mantenga la inversión en la forma $I(t) = \frac{90t}{t^2 + 9}$.

a) Calcula razonadamente cuantos años conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.

b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo e interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.

a) Para optimizar el tipo de interés buscaremos el máximo de la función $I'(t) = \frac{-90t^2 + 810}{\left(t^2 + 9\right)^2} = 0 \Rightarrow t = -3, t = 3$ (la solución negativa no tiene sentido en el problema)

	0 — 3	3 — $+\infty$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Luego el máximo interés lo obtiene si pacta por tres años.

b) Como $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{90t}{t^2 + 9} = 0 \Rightarrow$ el tipo de interés no podría llegar a ser nunca negativo.

35. Ejercicios interactivos.

36 a 44. Ejercicios resueltos.

Propiedades globales de las funciones

45. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$

b) $f(x)=x-\sqrt{3-2x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-2}}$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2-6x}}{x^2-1}$

f) $f(x)=\ln\left(x^2-2x-8\right)$

g) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$

h) $f(x)=\dfrac{x}{\text{sen}x}$

a) $x^3+x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $3-2x\geq 0\Rightarrow x\leq\dfrac{3}{2}\Rightarrow D(f)=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

c) $x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

d) $\dfrac{x+3}{x-2}\geq 0\Rightarrow D(f)=(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$

e) $x^3+x^2-6x\geq 0, x^2-1\neq 0\Rightarrow D(f)=(-3,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$

f) $x^2-2x-8>0\Rightarrow D(f)=(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$

g) $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

h) $\text{sen}x=0\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

46. Para las siguientes funciones, calcula sus puntos de corte con los ejes y estudia las zonas donde su imagen es positiva y donde su imagen es negativa.

a) $f(x)=(2x-6)(x+1)\left(x^2+3\right)$

b) $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

c) $f(x)=x^3+x^2-16x+20$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

f) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

g) $f(x)=\ln\left(x^2-8\right)$

h) $f(x)=|2x-10|-|2-x|$

a) Eje X: $(2x-6)(x+1)\left(x^2+3\right)=0\Rightarrow x=-1, x=3\Rightarrow A(-1,0), B(3,0)$ Eje $Y: C(0,f(0))=C(0,-18)$

Para estudiar el signo se resuelve la inecuación $(2x-6)(x+1)\left(x^2+3\right)>0$, obteniéndose que:

$$\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-1,3) \end{cases}$$

b) Eje X: $x^3-x^2-4x+4=0\Rightarrow x=-2, x=1, x=2\Rightarrow A(-2,0), B(1,0), C(2,0)$ Eje $Y: D(0,f(0))=D(0,4)$

Resolvemos la inecuación $x^3-x^2-4x+4>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-2,1)\cup(2,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-\infty,-2)\cup(1,2) \end{cases}$

c) Eje X: $x^3+x^2-16x+20=0\Rightarrow x=-5, x=2, \Rightarrow A(-5,0), B(2,0)$ Eje $Y: C(0,f(0))=C(0,20)$

Resolvemos la inecuación $x^3+x^2-16x+20>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-5,2)\cup(2,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-\infty,-5) \end{cases}$

d) $x^2-4=0 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Eje X: $\dfrac{x^2+2}{x^2-4}=0 \Rightarrow$ no tiene solución en $\mathbb{R}$ Eje $Y: A(0,f(0))=A\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x^2+2}{x^2-4}>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in(-2,2) \end{cases}$

e) $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0 \Rightarrow D(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$

Eje X: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0)$ Eje $Y: 0\notin D(f) \Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas.

$f\geq 0$ en su dominio.

f) $1-e^x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Eje X: $\dfrac{1}{1-e^x}=0 \Rightarrow$ no tiene solución. Eje $Y: 0\notin D(f) \Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas

Resolvemos la inecuación $\dfrac{1}{1-e^x}>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-\infty,0) \\ f<0, \text{si } x\in(0,+\infty) \end{cases}$

g) $x^2-8>0 \Rightarrow D(f)=\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$

Eje X: $\ln\left(x^2-8\right)=0 \Rightarrow x=-3, x=3 \Rightarrow A(-3,0), B(3,0)$ Eje $Y: 0\notin D(f) \Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas.

Resolvemos la inecuación $\ln\left(x^2-8\right)>0$, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0, \text{si } x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ f<0, \text{si } x\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right) \end{cases}$

h) $f(x)=|2x-10|-|2-x|=\begin{cases} -x+8 & \text{si} & x<2 \\ -3x+12 & \text{si} & 2\leq x\leq 5 \\ x-8 & \text{si} & 5<x \end{cases}$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} -x+8=0 \Rightarrow x=8\notin(-\infty,2) \\ -3x+12=0 \Rightarrow x=4\in[2,5] \\ x-8=0 \Rightarrow x=8\in(5,+\infty) \end{cases} \Rightarrow x=4, x=8 \Rightarrow A(4,0), B(8,0)$

Eje $Y: C(0,f(0))=C(0,8)$

Como es una función definida a trozos estudiaremos el signo de la función en cada uno de ellos, obteniéndose que: $\begin{cases} f>0 & \text{si} & x<2 \\ f>0, x\in[2,4) & \text{y} & f<0, x\in(2,5] \\ f<0, x\in(5,8) & y & f>0, x\in(8,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ y así concluimos que $f<0$ si $x\in(2,8)$ y $f>0$ si $x\in(-\infty,4)\cup(8,+\infty)$.

47. Estudia las simetrías de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^6}{x^4-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^6+1}{x^3-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4}$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\dfrac{\text{sen}x+\text{tg}x}{\cos x}$

g) $f(x)=\text{sen}(3x)+\cos(5x)$

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^6}{(-x)^4-1}=\dfrac{x^6}{x^4-1}=f(x)\Rightarrow$ es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) $f(-x)=\dfrac{(-x)^6+1}{(-x)^3-(-x)}=\dfrac{x^6+1}{-x^3+x}=-\dfrac{x^6+1}{x^3-x}=-f(x)\Rightarrow$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x)=\dfrac{-x+2}{(-x)^2+4}=\dfrac{-x+2}{x^2+4}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow$ la función no presenta simetría respecto del origen ni respecto de eje de ordenadas.

e) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)\Rightarrow$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

f) $f(-x)=\dfrac{\text{sen}(-x)+\text{tg}(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{\text{-sen}x+(\text{-tg}x)}{\cos x}=-\dfrac{\text{sen}x+\text{tg}x}{\cos x}=-f(x)\Rightarrow$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

g) $f(-x)=\text{sen}(3(-x))+\cos(5(-x))=-\text{sen}(3x)+\cos(5x)\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow$ la función no presenta simetría respecto del origen ni respecto de eje de ordenadas.

48. Señala el periodo de cada una de estas funciones.

a) $f(x)=\sec x$

b) $f(x)=\text{tg}(\pi x)$

c) $f(x)=\text{sen}(4x)$

d) $f(x)=\text{sen}^4 x$

e) $f(x)=\text{sen}x+\text{tg}x$

f) $f(x)=\text{sen}(2x)+\text{tg}(2x)$

g) $f(x)=\text{sen}(3x)+\text{tg}(3x)$

h) $f(x)=\text{sen}^2 x+\cos^2 x$

a) $f(x+2\pi)=\sec(x+2\pi)=\sec(x)=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período 2π.

b) $f(x+1)=\text{tg}(\pi(x+1))=\text{tg}(\pi x+\pi)=\text{tg}(\pi x)=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período 1.

c) $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(4\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\text{sen}(4x+2\pi)=\text{sen}(4x)=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período $\dfrac{\pi}{2}$.

d) $f(x+\pi)=\text{sen}^4(x+\pi)=(-\text{sen}x)^4=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período π.

e) $f(x+2\pi)=\text{sen}(x+2\pi)+\text{tg}(x+2\pi)=\text{sen}x+\text{tg}x=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período 2π.

f) $f(2(x+\pi))=\text{sen}(2x+2\pi)+\text{tg}(2x+2\pi)=\text{sen}(2x)+\text{tg}(2x)=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con período π.

g) $f\left(3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=\text{sen}(3x+2\pi)+\text{tg}(3x+2\pi)=\text{sen}(3x)+\text{tg}(3x)=f(x)\Rightarrow$ la función es periódica con periodo $\dfrac{2\pi}{3}$.

h) $f(x)=\text{sen}^2x+\cos^2 x=1\Rightarrow$ La función es constante.

Asíntotas

49. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$:

a) Especifica su dominio de definición.

b) Estudia su continuidad.

c) Calcula sus asíntotas si las hubiera.

a) $x^2-3x+2=0 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{1,2\}$

b) La función es continua en su dominio por ser cociente de funciones continuas. Estudiemos los puntos $x = 1$ y x = 2.

$$x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-2}=-1\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-2}=-1\end{cases}$$ $\Rightarrow f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

$x=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \Rightarrow f$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

c) En el apartado anterior hemos probado que hay una asíntota vertical en $x = 2$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=1\Rightarrow y=1$.

Asíntotas oblicuas: no tiene por tener asíntotas horizontales.

50. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones, estudia el comportamiento de la función con respecto a sus asíntotas e interprétalas gráficamente.

a) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2+4}$

b) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

f) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^3+1}$

g) $f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{x^2+1}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$

i) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$

j) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3}$

k) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-2x^2-3x}$

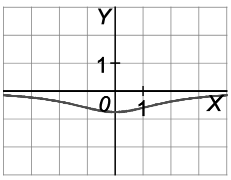
f) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+2}{2x^2-x+2}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

h) $f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}$

a) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x^2+4}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x^2+4}=0$

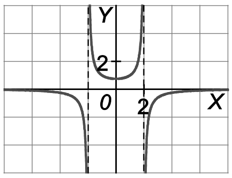


$y = 0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$, y como la función es siempre negativa, su gráfica está por debajo de la asíntota.

Asíntotas oblicuas: no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

b) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-3}{x^2-4} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3}{x^2-4} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty \Rightarrow x = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-3}{x^2-4} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-3}{x^2-4} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \Rightarrow x = 2$



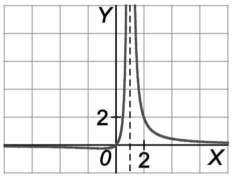
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3}{x^2-4} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$, y como la función no corta a la asíntota y si $x < -2$ o $x > 2$, $f(x) < 0$ por lo que la curva queda por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

c) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$

Asíntotas horizontales:



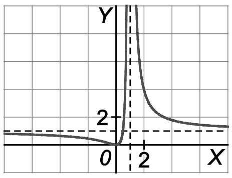
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$

La función corta a la asíntota en O (0, 0). Si $x < 0$ la función es negativa, por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si $x > 0$ la función es positiva, por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

d) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$



Asíntotas horizontales:

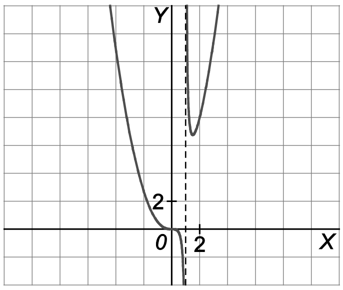
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow y = 1.$

Como $f(x) = 1 + \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, si $x < 0$ entonces $f(x) < 1$ por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si $x > 1$ entonces $f(x) > 1$, por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

e) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$



Asíntotas horizontales:

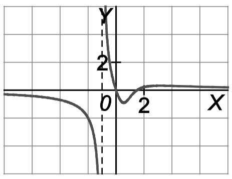
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = -\infty \Rightarrow$ no tiene.

Asíntotas oblicuas:

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x-1} : x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-x} = +\infty \Rightarrow$ no tiene.

f) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2-3x}{x^3+1} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2-3x}{x^3+1} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = -1$

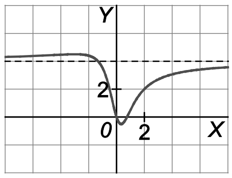


Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x^3+1} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x^3+1} = 0 \Rightarrow y = 0.$

La función corta a la asíntota en A (0, 0) y en $B\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$. Si $x < -1$ la función es negativa por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si $x > \dfrac{3}{2}$ entonces $f(x) > 0$, por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota. No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

g) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.



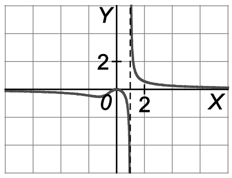
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-3x}{x^2+1} = 4 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3x}{x^2+1} = 4 \Rightarrow y = 4$$

Resolviendo $\frac{4x^2-3x}{x^2+1} = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$ es el punto de corte con la asíntota. Como $f(x) = 4 - \frac{3x+2}{x^2+1}$, si $x < -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) > 4$ por lo que a la izquierda la curva queda por encima de la asíntota. Si $x > -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) < 4$ por lo que a la derecha la curva queda por debajo de la asíntota.

h) Asíntotas verticales: $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^3-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^3-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$

Asíntotas horizontales:

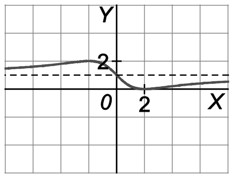


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3-1} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3-1} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

La función corta a la asíntota en A (0, 0). Si $x < 0$ la función es negativa por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si $x > 1$ entonces $f(x) > 0$ por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

i) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.



Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2+4} = 1$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2+4} = 1$

$y = 1$ es la asíntota horizontal

Resolviendo $\frac{(x-2)^2}{x^2+4} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = (0,1)$ es el punto de corte con la asíntota**.**

Como $f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+4}$, si $x < 0$ entonces $f(x) > 1$, por lo que a la izquierda la curva queda por encima de la asíntota. Si $x > 0$ entonces $f(x) < 1$, por lo que a la derecha la curva queda por debajo de la asíntota.

j) Asíntotas verticales:

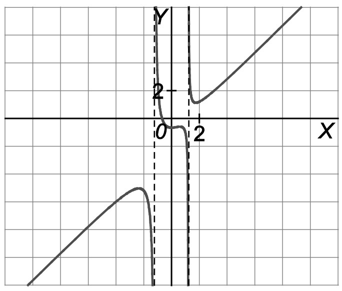
$$\lim_{x\to-\frac{\sqrt6}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\sqrt6}{2}^-} \frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} = -\infty \quad \lim_{x\to-\frac{\sqrt6}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\sqrt6}{2}^+} \frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} = +\infty \Rightarrow x = -\frac{\sqrt6}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt6}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\sqrt6}{2}^-} \frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} = -\infty \quad \lim_{x\to\frac{\sqrt6}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\sqrt6}{2}^+} \frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} = +\infty \Rightarrow x = \frac{\sqrt6}{2}$$

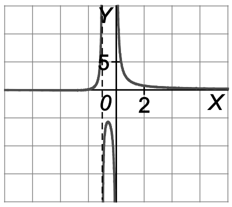
Asíntotas horizontales: No tiene porque el grado del numerador es mayor que el denominador.

Asíntota oblicua: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} : x\right) = 1,\ n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3} - x\right) = -\frac{3}{2}$

la asíntota oblicua es $y = x - \frac{3}{2}$. Si $x < -\frac{\sqrt6}{2} \Rightarrow f(x) < x - \frac{3}{2}$ y la curva queda por debajo de la asíntota. Si $x > \frac{\sqrt6}{2} \Rightarrow f(x) > x - \frac{3}{2}$ y la curva queda por encima de la asíntota.



k) Asíntotas verticales:



$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = +\infty \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = -\infty \Rightarrow x = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = -\infty \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = +\infty \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{5}{12} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{5}{12} \Rightarrow x = 3$$ es una discontinuidad evitable.

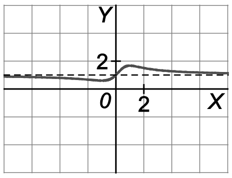
Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 0 \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 0 \Rightarrow y = 0$

La función corta a la asíntota en *A* (-2, 0). Si *x* < -2 entonces *f*(*x*) < 0 por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si *x* >3 entonces *f*(*x*) > 0, por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota.

l) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2} = 1$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2} = 1$

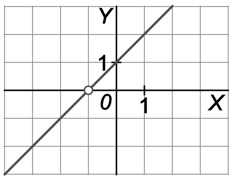
y = 1 es la asíntota horizontal.



Resolviendo $\frac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = (0,1)$ es el punto de corte con la asíntota**.**

Como $f(x) = 1 - \frac{2x}{2x^2 - x + 2}$, si *x* < 0 entonces *f* (*x*) <1, por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si *x* > 0 entonces *f* (*x*) >1, por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota

m) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+1} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq -1 \\ \text{no existe} & \text{si } x = -1 \end{cases}$



n) Asíntotas verticales:

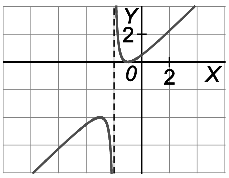
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = -\infty \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = +\infty \Rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{9}{4} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$ es una discontinuidad evitable.

Asíntotas horizontales: no tiene porque el grado del numerador es mayor que el del denominador.

Asíntotas oblicuas $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} : x \right) = 1$ y $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} - x \right) = 0$ la recta *y* = *x* es asíntota oblicua. La función no corta a la asíntota.

Si *x* < –2 entonces *f*(*x*) < *x,* por lo que a la izquierda la curva queda por debajo de la asíntota. Si *x* > 2 entonces *f*(*x*) > *x,* por lo que a la derecha la curva queda por encima de la asíntota.



51. Estudia las asíntotas y su posición respecto de la curva, en las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x+\frac{3}{4}}$

b) $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

h) $f(x)=\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$

i) $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$

j) $f(x)=\ln(2x-3)$

k) $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

a) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f)=\left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\frac{3}{4}}=+\infty$ no tiene.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\frac{3}{4}}:x\right)=0$ no tiene.

b) Asíntotas verticales: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\Rightarrow x=0$

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1\Rightarrow y=1$ es la asíntota horizontal en -∞ y en $+\infty$, y como $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}=\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}>1$ la curva queda por encima de la asíntota.

c) Asíntotas verticales: No tiene ya que $D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}=-\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntotas oblicuas: $m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}:x\right)=1$ $m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}:x\right)=1$

$n_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-m_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}-x\right)=0$ $n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-m_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x}-x\right)=0\Rightarrow y=x$ es la asíntota oblicua a izquierda y a derecha y como $f(x)=x-\frac{16}{x\left(\sqrt{x^4-16}+x^2\right)}$ es mayor que x si $x<0$ y menor que x si $x>0$. La curva queda por encima de la asíntota en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

d) Asíntotas verticales: No tiene ya que $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntotas oblicuas: $m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}:x\right)=1$ $m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}:x\right)=-1$

$n_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-m_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0$ $n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-m_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=0\Rightarrow y=-x$ es la asíntota oblicua a izquierda y como $f(x)-(-x)$ es negativo, la curva queda por debajo de la asíntota e $y=x$ es la asíntota a la derecha y como $f(x)-(x)$ es negativo, la curva queda por debajo de la asíntota.

e) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda y como $f(x) > 0$, la curva queda por encima de la asíntota.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}} : x = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

f) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^x} = +\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{e^x} = 0 \Rightarrow$, La recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha y como $f(x) > 0$, la curva queda por encima de la asíntota.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{e^x} : x\right) = 0 \Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

g) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty}\ln(2x-3) = +\infty \Rightarrow$ .No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-3)}{x} = 0 \Rightarrow$ .No tiene asíntotas oblicuas.

h) Asíntotas verticales: no tiene porque $D(f) = (-1, +\infty)$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty}\ln\sqrt{x+1} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x+1}}{x} = 0 \Rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

52. Estudia las asíntotas y su posición respecto de la curva, en las siguientes funciones.

a) $f(x) = |2x-3| + x|x-1|$

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

c) $f(x) = \frac{|x|+2}{x+2}$

i) $f(x) = \left|\frac{x}{x+1}\right|$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2-x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-3x+3 & \text{si} \quad 1\le x\le \frac{3}{2} \\ x^2+x-3 & \text{si} \quad \frac{3}{2}<x \end{cases}$

Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^2-x+3 = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2+x-3 = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-x+3}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-3}{x} = +\infty \Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

b) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x}=+\infty \Rightarrow x=0$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{x}=0 \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow y=0$

Como *f*(*x*) >0 en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, la curva queda por encima de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+2}{x+2} & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-x+2}{x+2}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-x+2}{x+2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=-2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x+2}{x+2}=-1\Rightarrow y=-1 \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} 1=1\Rightarrow y=1$

La curva queda por debajo de la asíntota por la izquierda.

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x<-1 \\ -\dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad -1<x\leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-x}{x+1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=-1$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x+1}=1 \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1}=1\Rightarrow y=1$ es la asíntota horizontal.

La curva queda por encima de la asíntota por la izquierda y por debajo por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

Esquema general del estudio de una función

53. La función $y = f(x)$ de la figura tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.

a) Determina los puntos donde la función vale 0. Determina los valores de x para los que la función es positiva.

b) Di en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

d) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

e) Determina a sabiendo que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.

a) En $x = -1$ y en $x = 2$, la función vale cero: $f(-1) = f(2) = 0$. La función es positiva en $(-\infty, -1)$.

b) La derivada se anula en los puntos con tangente horizontal, $x = 0$ y $x = 2$: $f'(0) = f'(2) = 0$. La derivada es negativa si la función decrece, es decir, en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) En $x = 2$, la tangente es horizontal y pasa por el punto $A(2, f(2)) = A(2, 0)$. La recta tangente es $y = 0$.

d) En $x = -1$, la pendiente de la recta tangente es -3 y como la ordenada en el origen es - 3, la ecuación de la tangente es $y = -3x - 3$.

e) Como en la gráfica no se aprecia con exactitud la ordenada de los puntos utilizaremos la derivada en $x = -1$.

$f'(x) = a\,((x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2))$. Como $f'(-1) = -3$, entonces: $-3 = f'(-1) = 9a$, de donde $a = -\frac{1}{3}$.

54. Representa una función que cumpla lo siguiente.

- **Las rectas $x = -2$, $x = 4$ e $y = -2$ son sus únicas asíntotas.**
- **Su derivada no se anula nunca y es negativa en todos los puntos en que está definida.**

a) ¿Cuántas veces se anula una función con esas propiedades?

b) ¿Puede la derivada segunda no anularse nunca?

a) La función se anula una sola vez, entre $x = -2$ y $x = 4$ y también puede anularse en $(4, +\infty)$.

b) La derivada segunda se anula una vez, entre $x = -2$ y $x = 4$.

Funciones polinómicas

55. Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

a) Halla sus máximos y mínimos.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Estudiamos en qué puntos se anula la derivada $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$.

	$-\infty$ — 2	2 — 5	5 — $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función tiene un máximo relativo en (2, 208) y un mínimo relativo en (5, 100).

b) La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ y decrece en (2, 5).

56. Se considera la función $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$.

a) Determina su crecimiento y sus extremos relativos.

b) Determinar su curvatura y sus puntos de inflexión.

c) Representa gráficamente.

a) Estudiamos en qué puntos se anula la derivada $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$

	$-\infty$ … 2	2 … 5	5 … $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función tiene un máximo relativo en (2, 60) y un mínimo relativo en (5, –21) y es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en (2, 5).

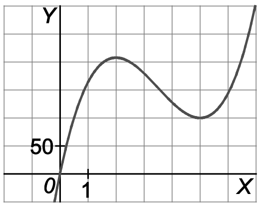
b) Estudiamos en qué puntos se anula la segunda derivada $f''(x) = 48x - 168 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

	$-\infty$ … $\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$ … $+\infty$
$f''(x)$	–	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

El punto $C\left(\frac{7}{2}, 154\right)$ es un punto de inflexión.

c)



57. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-3x+2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$:

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad.

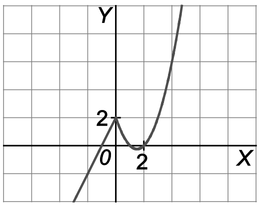
c) Determina sus extremos relativos.

a) El primer tramo es una semirrecta creciente que pasa por los puntos *A*(–1, 0) y *B*(0, 2).

El segundo tramo corresponde a una parábola cóncava hacia arriba, que corta al eje *X* en los puntos *C*(1, 0) y *D*(2, 0).

Su vértice es el punto $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-3x+2)=2$.



b) Observando la gráfica podemos asegurar que la función es continua. Como intervienen una semirrecta y un trozo de parábola, solo queda estudiar qué ocurre en el punto de solapamiento, *x* = 0.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-3x+2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0 \text{ y por tanto es continua en todo } \mathbb{R}.$$

c) Tiene dos extremos relativos, un máximo relativo en el punto de solapamiento *B*(0, 2) y un mínimo relativo en el vértice de la parábola $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

58. *Dada la función $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$:

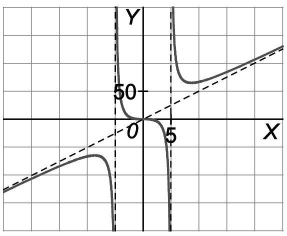
a) Traza su gráfica estudiando previamente el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

b) ¿Hay puntos de corte con los ejes de coordenadas?

a) Estudiamos en qué puntos se anula la derivada $f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=-1, x=3$:

	$-\infty$ … -1	-1 … 3	3 … $+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función tiene un máximo relativo en *A*(–1, 0) y un mínimo relativo en *B*(3, –32) y es creciente en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en (–1, 3)



b) Eje *X*: $f(x)=x^3-3x^2-9x-5=0 \Rightarrow x=-1, x=5 \Rightarrow A(-1,0), B(5,0)$

Eje *Y*: $C(0,f(0))=(0,-5)$

59. Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$:

a) Traza su gráfica estudiando previamente sus puntos de corte con los ejes, su signo, el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

b) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función?

a) Eje X: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 1 \Rightarrow A(-3,0), B(1,0)$

Eje Y: $C(0, f(0)) = (0,9)$

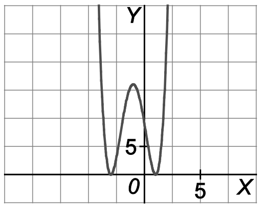
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	+	+	+

Así, f es positiva en su dominio.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1, x = 1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Así, $f(x)$ crece en $(-3,-1) \cup (1,+\infty)$, decrece en $(-\infty,-3) \cup (-1,1)$, $(-1,16)$ es el máximo relativo y $(1,0)$ y $(-3,0)$ son los mínimos relativos.



b) Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = 12x^2 + 24x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ y $P\left(\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right)$ **y** $Q\left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right)$ son los puntos de inflexión.

	$\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

Funciones racionales

60. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

a) Calcula el dominio y asíntotas.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Haz su representación gráfica aproximada.

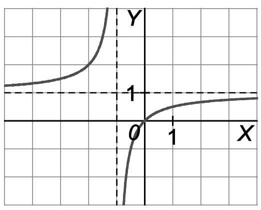
a) Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas verticales: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow x = -1$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow y = 1$

b) Como $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f$ es creciente en su dominio.

c) Con los datos anteriores esbozamos la gráfica:



61. Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

1.º Dominio: $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

4.º Puntos de corte con los ejes: Eje X: $\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x=0$ Eje Y: $A(0,f(0))=(0,0)$. El signo de f es positivo.

5.º Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=1 \Rightarrow y=1$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-2)^3}=0 \Rightarrow x=0$

	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

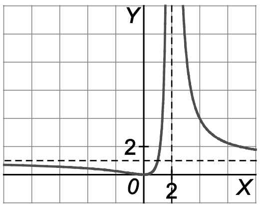
La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y creciente en (0, 2). Tiene un mínimo relativo en $A(0, 0)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{8x+8}{(x-2)^4}=0 \Rightarrow x=-1$

	$-\infty$ … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

El punto $A(-1, f(-1))$ = $\left(-1,\dfrac{1}{9}\right)$ es un punto de inflexión.



62. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.

b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Extremos relativos.

e) Representación gráfica aproximada.

a) Dominio: $x^2-4=0 \Rightarrow x=2, x=-2 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$.

Puntos de corte con los ejes: Eje *X*: $\dfrac{x}{x^2-4}=0 \Rightarrow x=0$ Eje *Y*: $A(0,f(0))=A(0,0)$

Simetría: $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-f(x)$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty \Rightarrow x=-2$

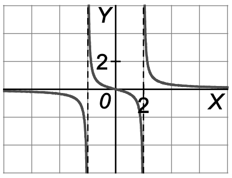
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0 \Rightarrow y=0$

c) Crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0 \Rightarrow$ la función es decreciente en su dominio.

d) La función no tiene extremos relativos.

e) Con lo anterior podemos esbozar la gráfica de la función.



63. Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}$**. Halla el dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos. Esboza la gráfica.**

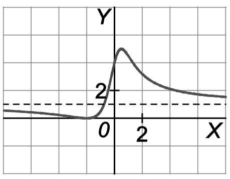
Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: Eje X: $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2,0)$ Eje Y: $B(0,f(0))=B(0,4)$

Asíntotas verticales: no tiene porque su dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=1 \Rightarrow y=1$

Crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\dfrac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=-2, x=\dfrac{1}{2}$, estudiando el signo de la derivada obtenemos que la función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ y creciente en $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$. Tiene un mínimo relativo (que es absoluto) en el punto $A(-2, 0)$ y un máximo relativo (que también es absoluto) en $C\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2},5\right)$.



64. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f.*

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f.*

c) Estudia su curvatura y sus puntos de inflexión.

a) Puntos de corte con los ejes: Eje *X*: $\dfrac{x^4+3}{x}=0 \Rightarrow$ no tiene solución. Eje *Y*: $0 \notin D(f)$ .No corta a los ejes.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^4+3}{x}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+3}{x}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=0$

Asíntotas horizontales: no tiene porque el grado del numerador es mayor que el denominador.

Asíntotas oblicuas: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4+3}{x}:x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+3}{x}:x=+\infty \Rightarrow$ No tiene.

b) Crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\dfrac{3x^4-3}{x^2}=0 \Rightarrow x=-1, x=1$

	$-\infty$ … **-1**	**-1** … **0**	**0** … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decreciente en $(-1,0)\cup(0,1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto *A*(1, 4) y un máximo relativo en *B*(-1, -4)**.**

c) Curvatura: $f''(x)=\dfrac{6x^4+6}{x^3}=0 \Rightarrow$ La función es cóncava hacía abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacía arriba en $(0,+\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

65. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{5x^3}{x^2-25}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-4\}$

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\dfrac{3x-1}{x+4}=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{3},0\right)$; Eje Y: $(0,f(0))=\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$

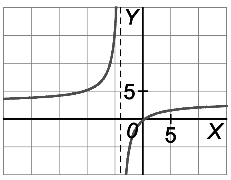
Además, $f<0$ si $x\in\left(-4,\dfrac{1}{3}\right)$ y $f>0$ si $x\in(-\infty,-4)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

5.º Asíntotas: Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{3x-1}{x+4}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{3x-1}{x+4}=-\infty \Rightarrow x=-4$

Asíntotas horizontales $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-1}{x+4}=3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-1}{x+4}=3 \Rightarrow y=3$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{13}{(x+4)^2}>0 \Rightarrow f$ es creciente, no tiene puntos críticos ni máximos ni mínimos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-26}{(x+4)^3} \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-4)$ y cóncava hacia abajo en $(-4,+\infty)$.



8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:

b) 1.º Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

2.º Simetría. $f(-x) = \dfrac{5(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{-5x}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow f$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo**:**

Eje X: $\dfrac{5x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. El único punto de corte es el $O(0,0)$ y $f < 0$ si $x < 0$ y $f > 0$ si $x > 0$.

5.º Asíntotas verticales: no tiene porque el dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{x^2+1} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y = 0$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-5x^2+5}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

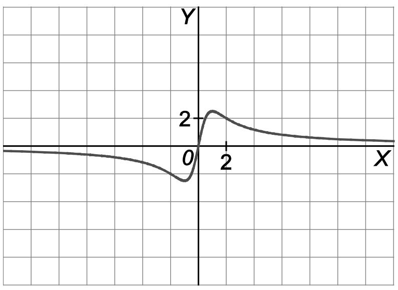
Así, $f(x)$ crece en $(-1,1)$**,** decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$**,** presenta máximos relativos en $A\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(-1,-\dfrac{5}{2}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \dfrac{10x^3-30x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a 0	0 a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se da el resultado y se deduce que los puntos $C\left(-\sqrt{3},-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$**,** $O(0,0)$ y $D\left(\sqrt{3},\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ son puntos de inflexión.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



c) 1.º Dominio: $x^2-25 \Rightarrow x=-5, x=5 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-5,5\}$.

2.º Simetría. $f(-x)=\dfrac{5(-x)^3}{(-x)^2-25}=-\dfrac{5x^3}{x^2-25}=-f(x)\Rightarrow f$ simétrica respecto del origen de coordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $\dfrac{5x^3}{x^2-25}=0\Rightarrow x=0$ Eje Y: $O(0,f(0))=(0,0)$. El signo de f cambia en las raíces del numerador y del denominador y se muestra en la tabla.

	$-\infty$ a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a $+\infty$
$f(x)$	−	+	−	+

5.º Asíntotas:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{5x^3}{x^2-25}=\dfrac{-625}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{5x^3}{x^2-25}=\dfrac{-625}{0^-}=+\infty\Rightarrow x=-5$

$\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{5x^3}{x^2-25}=\dfrac{625}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{5x^3}{x^2-25}=\dfrac{625}{0^+}=+\infty\Rightarrow x=5$

Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas:
$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3}{x^2-25}:x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3}{x^3-25x}=5 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3}{x^2-25}-5x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{125x}{x^2-25}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=5x$$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{5x^4-375x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=0\Rightarrow x=0, x=-5\sqrt{3}, x=5\sqrt{3}$

	$-\infty$ a $-5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$ a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a $5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$ a $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↘	↗

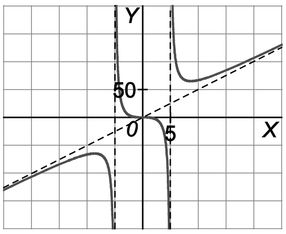
Así, $f(x)$ crece en $\left(-\infty,-5\sqrt{3}\right)\cup\left(5\sqrt{3},+\infty\right)$, decrece en $\left(-5\sqrt{3},-5\right)\cup(-5,5)\cup\left(5,5\sqrt{3}\right)$, presenta máximos relativos en $\left(-5\sqrt{3},-\dfrac{75\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(5\sqrt{3},\dfrac{75\sqrt{3}}{2}\right)$

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{250x^3+18750x}{\left(x^2-25\right)^3}=0\Rightarrow x=0$

	$-\infty$ a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a $+\infty$
$f''(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	∩	∪	∩	∪

En la tabla se da el resultado y se deduce que el punto $(0,0)$ es un punto de inflexión.

8.º Con la información encontrada se puede trazar la gráfica de la función:



Funciones irracionales

66. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{1-x}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x-1}$

Una vez que las hayas representado analiza las similitudes y diferencias que observes en ambas gráficas.

a) 1.º Dominio y continuidad: El radicando no puede ser negativo $1-x\geq 0\Rightarrow D(f)=(-\infty,1]$. Es continua en su dominio.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje *X*: $1-x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow A(1,0)$, Eje *Y*: $B(0,f(0))=B(0,1)$

La función *f* es siempre positiva salvo en el punto *A.*

5.º Asíntotas

Asíntotas verticales: No tiene al no haber puntos en el dominio en el que la función tienda a ±∞.

Asíntotas Horizontales: no tiene, ya que los límites en –∞ es igual a +∞.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-x}}{x}=0\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x+1}}<0\Rightarrow f$ es decreciente y como no se anula en $D(f)$, por lo que no hay extremos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\frac{1}{(4x-4)\sqrt{-x+1}}<0\Rightarrow f$ en su dominio es cóncava hacia abajo en su dominio.

b) 1.º Dominio y continuidad: El radicando no puede ser negativo $x-1\geq 0\Rightarrow D(f)=[1,+\infty)$. Es continua en su dominio.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo Eje X: $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow A(1,0)$,Eje Y: $0\notin D(f)$ no corta al eje y

La función f es siempre positiva salvo en el punto *A.*

5.º Asíntotas

Asíntotas verticales: No tiene al no haber puntos en el dominio en el que la función tienda a $\pm\infty$.

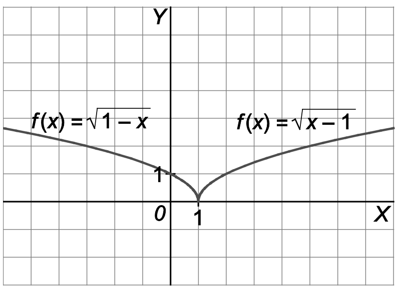
Asíntotas Horizontales: no tiene, ya que los límites en $+\infty$ es igual a $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x}=0\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0\Rightarrow f$ es creciente y como no se anula en $D(f)$ por lo que no hay extremos relativos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\frac{-1}{(4x-4)\sqrt{x-1}}<0\Rightarrow f$ en su dominio es cóncava hacia abajo en su dominio.

Si dibujamos las dos gráficas en los mismos ejes observamos que ambas son simétricas respecto del eje *x* = 1.



67. **Traza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Para ello, determina primero el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.**

1.º Dominio: El radicando no puede ser negativo $1-x>0 \Rightarrow D(f)=(-\infty,1)$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: La función *f* es siempre positiva en su dominio.

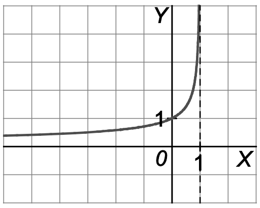
Eje *X*: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0 \Rightarrow$ no tiene solución. Eje *Y*: *A* (0, *f* (0))= *A* (0, 1)

5.º Asíntotas. Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty \Rightarrow x=1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0 \Rightarrow y=0$

No tiene asíntota oblicua.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-1}{(2x-2)\sqrt{x-1}}>0 \Rightarrow f$ es creciente en su dominio y no tiene extremos relativos.



68. **Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$:**

a) Dibuja su gráfica tras estudiar su dominio, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

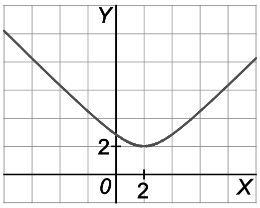
b) De acuerdo con la gráfica, señala los intervalos de concavidad de la función.

a) Dominio: como $x^2-4x+8>0 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes y signo: La función *f* es siempre positiva en su dominio

Eje X: $\sqrt{x^2-4x+8}=0 \Rightarrow$ no tiene solución. Eje Y: $A(0,f(0))=A\left(0,2\sqrt{2}\right)$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}} \Rightarrow f$ es creciente si $x > 2$ y decreciente si $x < 2$ y el punto *B* (2, 2) es un mínimo absoluto de la función.



b) La función es cóncava hacia arriba.

69. Dada la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, estudia su dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos. Con los datos obtenidos, represéntala gráficamente e interprétala desde el punto de vista geométrico.

Dominio: El radicando no puede ser negativo $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow D(f)=[-1,1]$.

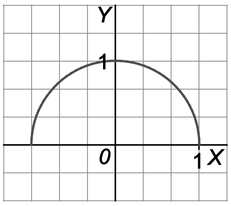
Puntos de corte con los ejes: Eje X: $\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow x=-1, x=1 \Rightarrow B(-1,0), C(1,0)$ Eje Y: $A(0,f(0))=A(0,1)$

Asíntotas: Asíntotas verticales: No tiene al no haber puntos en el dominio en el que la función tienda a $\pm\infty$.

Asíntotas horizontales y oblicuas: no tiene, ya que $D(f)=[-1,1]$.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow x=0$

	−1	0
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘



Así, $f(x)$ crece en $(-1,0)$, decrece en $(0,1)$ y tiene un máximo relativo en el punto $A(0,1)$ y mínimos absolutos en $(-1,0)$ y en $(1,0)$.
Observamos que la gráfica corresponde con la semicircunferencia de centro el origen y radio 1.

Funciones trigonométricas y sus inversas

70. Esboza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3\cos(2x)$ **b)** $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$, la función es continua en su dominio

2.º Simetría. $f(-x)=3\cos(2(-x))=3\cos(2x)=f(x) \Rightarrow f$ tiene simetría par.

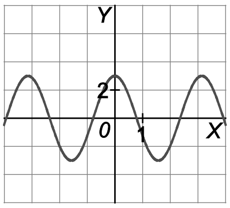
3.º Periodicidad: $f(x+\pi)=3\cos(2(x+\pi))=3\cos(2x+2\pi)=3\cos(2x)=f(x) \Rightarrow f$ es una función periódica con período π. Por tanto sólo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0,\pi]$ y generalizar los resultados a $\mathbb{R}$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $3\cos(2x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{3\pi}{4}, A\left(\dfrac{\pi}{4},0\right), B\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$

Eje Y: $C(0,f(0))=C(0,3)$, $f>0$ si $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ y $f<0$ si $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

6.º Puntos singulares y crecimiento $f'(x)=-6\operatorname{sen}(2x)=0 \Rightarrow x=0, x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi \Rightarrow f$ crece en $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ y decrece en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. El punto $\left(\dfrac{\pi}{2},-3\right)$ es su mínimo relativo y absoluto y $(0,3)$ y $(\pi,3)$ son sus máximos relativos y absolutos.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=-12\cos(2x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow$ es cóncava hacia arriba en $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ y en $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ cóncava hacia abajo y los puntos de inflexión son $A\left(\dfrac{\pi}{4},0\right), B\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$.



b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R}$, la función es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x) = \text{sen}(-x) + \cos(-x) = -\text{sen}(x) + \cos(x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow f$ no tiene simetría par ni impar.

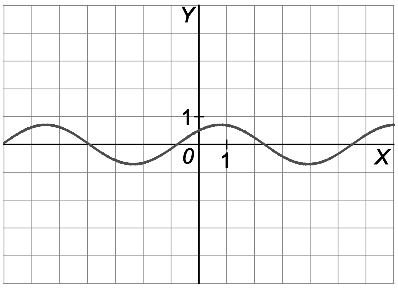
3.º Periodicidad: $f(x+2\pi) = \text{sen}(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \text{sen}(x) + \cos(x) = f(x) \Rightarrow f$ es una función periódica con período 2π. Por tanto sólo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, 2\pi]$ y generalizar los resultados a $\mathbb{R}$

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\text{sen}x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}, A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), B\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

Eje Y: $C(0, f(0)) = C(0,1)$, $f > 0$ si $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y $f < 0$ si $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

6.º Puntos singulares y crecimiento $f'(x) = -\text{sen}x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f$ crece en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. El punto $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ es su máximo relativo y absoluto y $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ es su mínimo relativo y absoluto**.**

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = -\text{sen}x - \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$ es cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ cóncava hacia arriba y los puntos de inflexión son: $A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), B\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

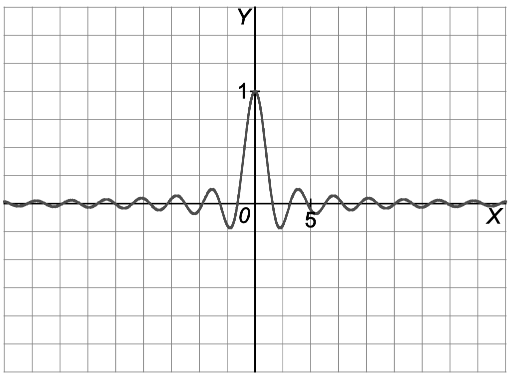


71. Halla las asíntotas y esboza la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$**.**

El dominio de la función son todos los números reales.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \Rightarrow$ Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es la asíntota horizontal a la izquierda y a la derecha, además la corta en los puntos de la forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



72. Dada la función $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\cos x}$, estudia su periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas verticales y extremos relativos. Represéntala.

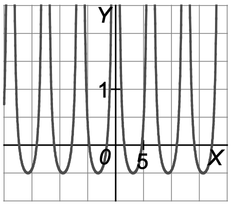
Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

Periodicidad: $f(x+2\pi)=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{1-\cos(x+2\pi)}=\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=f(x)\Rightarrow f$ es una función periódica con periodo 2π. Por tanto sólo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y generalizar los resultados a $\mathbb{R}$.

Cortes con los ejes: Eje X: $\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=0\Rightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}, x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A\left(\dfrac{-\pi}{2},0\right), B\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$. Eje Y: $0\notin D(f)$ luego no corta al eje de ordenadas.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=+\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=+\infty\Rightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ son las asíntotas verticales.

Crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen}x}{(\cos x-1)^2}\Rightarrow x=-\pi, x=\pi\Rightarrow f$ crece en $(-\pi,0)$ y decrece en $(0,\pi)$ y $\left(-\pi,-\dfrac{1}{2}\right),\left(\pi,-\dfrac{1}{2}\right)$ son mínimos de la función.



Funciones exponenciales

73. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones y esboza sus gráficas:

a) $f(x)=(1-x)e^{-x}$ **b)** $f(x)=x^2e^x$ **c)** $f(x)=e^{-x^2+x}$

a) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=(1-(-x))e^{-(-x)}=(1+x)e^x\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow f$ no tiene simetría respecto del origen de coordenadas ni respecto del eje de ordenadas.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo:

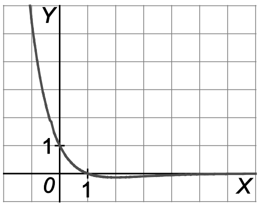
Eje *X:* $(1-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow A(1,0)$ Eje *Y:* $B(0,f(0))=B(0,1)$. Además, $f>0$ si $x<1$ y $f<0$ si $x>1$.

5.º Asíntotas: Asíntotas verticales: No tiene ya que su dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales:. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}=\infty e^{\infty}=\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}=-\infty e^{-\infty}=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-x)e^{-x}}{x}=e^{+\infty}=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x-2}{e^x}=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f$ decrece si $x<2$ y crece si $x>2$. El punto $C\left(2,\dfrac{-1}{e^2}\right)$ es un mínimo absoluto.



7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-x+3}{e^x}=0\Rightarrow x=3\Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba si $x<3$ y cóncava hacia abajo si $x>3$ y el punto $D\left(3,\dfrac{-2}{e^3}\right)$ es un punto de inflexión.

b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=(-x)^2 e^{-x}=x^2e^{-x} \Rightarrow f$ no tiene simetría ni par ni impar.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $x^2e^x=0 \Rightarrow x=0,$ Eje Y: $O(0,f(0))=(0,0)$. La función es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

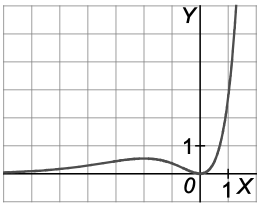
5.º Asíntotas verticales: No tiene ya que su dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=\frac{\infty}{e^\infty}=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x=\infty \Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{x}=\infty \Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x=0 \Rightarrow x=0, x=-2$. Así, $f(x)$ crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$ y tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo absoluto en (0, 0).

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\left(x^2+4x+2\right)e^x=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}-2, x=\sqrt{2}-2$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\sqrt{2}-2\right)\cup\left(\sqrt{2}-2,+\infty\right)$ y es cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{2}-2,\sqrt{2}-2\right)$.



c) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ **.** Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x)=e^{-(-x)^2-x}=e^{-x^2-x} \Rightarrow f$ no tiene simetría ni par ni impar.

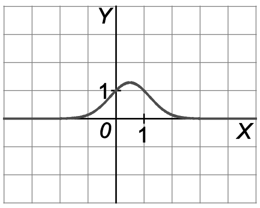
4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje *X*: $e^{-x^2+x}=0 \Rightarrow$ no tiene solución, Eje *Y*: $A(0,f(0))=(0,1)$. La función es siempre positiva.

5.º Asíntotas verticales: No tiene ya que su dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2+x}=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+x}=0 \Rightarrow y=0$ es la asíntota horizontal en $\pm\infty$.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=(1-2x)e^{-x^2+x}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow$. Así, $f(x)$ crece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y tiene un máximo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2},\sqrt[4]{e}\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\left(4x^2-4x-1\right)e^{-x^2+x}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}, x=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},+\infty\right)$ y es cóncava hacia abajo en $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$.



74. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^2e^{-x}$.

Para estudiar el crecimiento de la función resolvemos $f'(x) = \left(-x^2 + 2x\right)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2.$

	$-\infty$ a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
$f'(x)$	−	+	−
$f(x)$	↘	↗	↘

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en (0, 2).Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto *O*(0, *f*(0)) = *O*(0, 0) y un máximo relativo en el punto *A*(2, *f*(2)) = $A\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$.

75. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$. Para ello, calcula sus asíntotas, demuestra que es simétrica respecto al origen y siempre decreciente, estudia su concavidad y halla su punto de inflexión.

1º Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x) = \dfrac{2\left(1-e^{-x}\right)}{1+e^{-x}} = \dfrac{2\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}{1+\dfrac{1}{e^x}} = 2\dfrac{\dfrac{e^x-1}{e^x}}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} = 2\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -2\dfrac{1-e^x}{e^x+1} = -f(x) \Rightarrow f$ es simétrica respecto al origen.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje *X*: $2\dfrac{1-e^x}{e^x+1} = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ Eje *Y*: $A\left(0, f(0)\right) = (0, 0)$

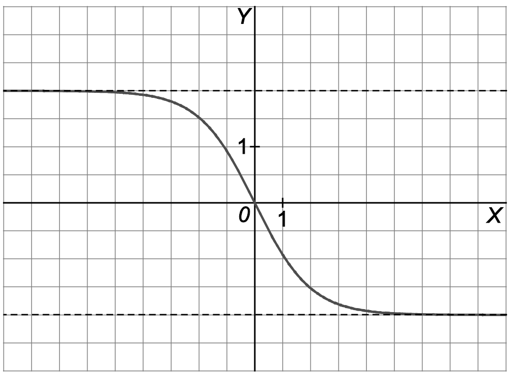
5.º Asíntotas verticales: No tiene, ya que su dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\dfrac{1-e^x}{e^x+1} = 2\dfrac{1-e^{-\infty}}{e^{-\infty}+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{1-e^x}{e^x+1} = 2\dfrac{1-e^{+\infty}}{e^{+\infty}+1} = -2 \Rightarrow y = -2$ es la asíntota horizontal en $+\infty$.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2} < 0 \Rightarrow f$. Así, $f(x)$ es decreciente.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \dfrac{4e^{2x} - 4e^x}{\left(e^x+1\right)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en *O*(0, *f*(0)) = *O*(0, 0).



Funciones logarítmicas

76. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones y esboza sus gráficas:

a) $f(x) = \ln(x+1) - 1$ **d)** $f(x) = \ln(1 + x^2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ **e)** $f(x) = 2x^2 - \ln x$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

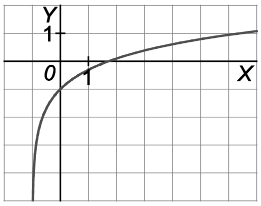
a) 1.º Dominio $D(f) = (-1, +\infty)$ **.** Es continua en su dominio.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje *X:* $\ln(x+1) - 1 = 0 \Rightarrow x = e - 1 \Rightarrow A(e-1, 0)$

Eje *Y:* $B(0, f(0)) = B(0, -1)$. Además, $f < 0$ si $x <$ e – 1 y $f > 0$ si $x >$ e – 1

5.º Asíntotas: Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) - 1 = -\infty \Rightarrow y = -1$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x+1) - 1 = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal en $+\infty$.



Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)-1}{x} = 0 \Rightarrow$ no tiene asíntota

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow f$ crece en su dominio.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en su dominio.

b) 1.º Dominio y continuidad: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ **.** Es continua en su dominio.

2.º Simetría. $f(-x) = \ln((-x)^2 - 4) = \ln(x^2 - 4) = f(x) \Rightarrow f$ tiene simetría par.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\ln(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}, x = \sqrt{5}, A(-\sqrt{5}, 0), B(\sqrt{5}, 0)$. La función es positiva en $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ y negativa en $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$.

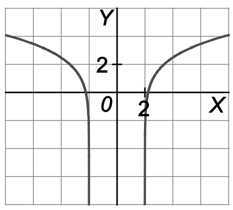
5.º Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \Rightarrow x = -2$ **,** $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \Rightarrow x = 2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$ no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} = 0, m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} = 0 \Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en su domino.



c) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

2.º Simetría. $f(-x)=\ln\left(\frac{1}{(-x)^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=f(x)\Rightarrow f$ tiene simetría par.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=0\Rightarrow x=-1, x=1, A(-1,0), B(1,0)$. La función es negativa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y positiva en $(-1,0)\cup(0,1)$.

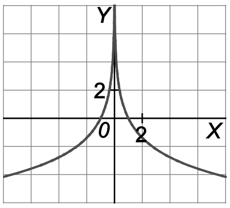
5.º Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty\Rightarrow x=0$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0, m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\frac{-2}{x}\Rightarrow f$ crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\frac{2}{x^2}>0\Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en su domino.



d) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$

2.º Simetría. $f(-x)=\ln\left(1+(-x)^2\right)=\ln\left(1+x^2\right)=f(x)\Rightarrow f$ tiene simetría par.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: Eje X: $\ln\left(1+x^2\right)=0\Rightarrow x=0$ Eje Y: $O(0,f(0))=(0,0)$

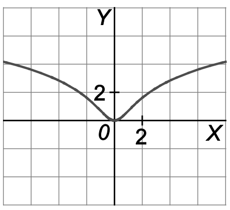
La función es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5.º Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)=+\infty$ no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=0, m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=0\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow x=0, f$ decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=-1, x=1\Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y hacia arriba en $(-1,1)$ y $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$ son los puntos de inflexión.



e) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=(0,+\infty)$

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: no corta a los ejes y siempre es positiva.

5.º Asíntotas verticales $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2-\ln(x)=+\infty \Rightarrow x=0$

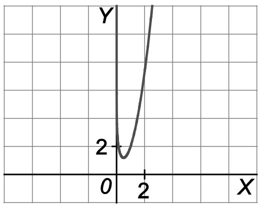
Asíntotas horizontales $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-\ln(x)=+\infty$ no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-\ln(x)}{x}=+\infty,\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}, f$ decrece en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Tiene un mínimo relativo y absoluto en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{4x^2+1}{x^2}>0\Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en su dominio.



f) 1.º Dominio y continuidad: $D(f)=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

4.º Puntos de corte con los ejes y signo: La función no corta a los ejes, $f>0$ si $x<-2$ y $f<0$ si $x>1$.

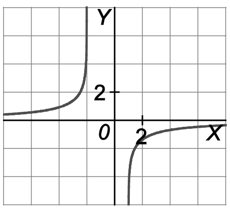
5.º Asíntotas verticales $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=+\infty\Rightarrow x=-2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=-\infty\Rightarrow x=1$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0\Rightarrow y=0$

6.º Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}>0\Rightarrow f$ crece en su dominio.

7.º Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-6x-3}{\left(x^2+x-2\right)^2}\Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en $(1,+\infty)$ y hacia arriba en $(-\infty,-2)$.



Aplicaciones a las ciencias sociales

77. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo en horas, *x* , que ha dedicado a su preparación de la forma siguiente: $P(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si} \quad 15 < x \end{cases}$.

a) Estudia el crecimiento de la función. Justifica que si dedica menos de 15 horas para preparar el examen, el estudiante suspenderá.

b) Justificar que nunca puede superar los 10 puntos.

a) La función es continua, ya que $\lim\limits_{x\to 15^-} \dfrac{x}{3} = \lim\limits_{x\to 15^+} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = f(15) = 5$ **.** Para estudiar su crecimiento calculamos su derivada, $P'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad 0 < x < 15 \\ \dfrac{6}{(0{,}2x+3)^2} & \text{si} \quad 15 < x \end{cases}$, que es siempre positiva. Así pues, como es continua y en los dos tramos la función es creciente podemos concluir que la función también es creciente.

Al ser la función creciente, si $x < 15$ se cumple que $P(x) < P(15) = 5$, con lo que si estudia menos de 15 horas no lllegará a alcanzar los 5 puntos.

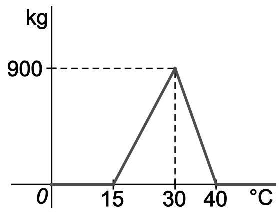
b) Como es creciente y el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$ podemos decir que por muchas horas de preparación, jamás se conseguirá una nota de 10.

78. En un invernadero se cultivan tomates. Se sabe que las tomateras solo dan frutos si la temperatura dentro del invernadero está entre 15 y 40 ºC. En la siguiente gráfica se muestra la producción de tomates en kilogramos según la temperatura que se mantiene en el invernadero

a) Si la temperatura está entre 15 y 29 ºC, di que variación experimenta la producción al aumentar la temperatura 1 ºC. Calcula dicha variación cuando la temperatura está entre 30 y 39 ºC.

b) Define una función a trozos que exprese la producción según la temperatura.

c) Halla las temperaturas para las que se obtiene el 75 % de la producción máxima.



a) La variación la da la pendiente de la recta. En el primer caso, entre 15 y 29, la recta tiene igual pendiente que la recta que une los puntos de abscisas 15 y 30, $m_1 = \dfrac{900-0}{30-15} = 60$. Si la temperatura se encuentra entre 30 y 39 grados la variación vendrá dada por la pendiente de la recta que une los puntos de abscisas 30 y 39, $m_1 = \dfrac{0-900}{40-30} = -90$.

b) Como conocemos las pendientes de las rectas podemos definir la producción de tomates de la siguiente forma:

$$P(x) = \begin{cases} 60x - 900 & \text{si} \quad 15 \le x \le 30 \\ -90x + 3600 & \text{si} \quad 30 < x \le 40 \end{cases}$$

c) La producción máxima es de 900 kg, y su 75 % es 675.

Si $15 \le x \le 30$, $60x - 900 = 675$, lo que implica que $x = 26{,}25$.

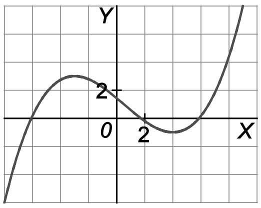
Si $30 \le x \le 40$, $-90x + 3600 = 675$, lo que implica que $x = 32{,}5$.

Así pues, a 26,25 ºC y a 32,5 ºC se consigue el 75 % de la producción máxima.

Síntesis

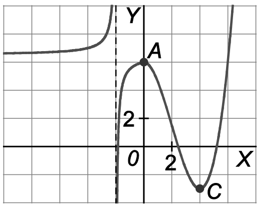
79. Dibuja una posible gráfica para *y* = *f* (*x*) si se sabe que:

- $f\,'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$ y $f\,'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$.
- $f(-3) < 4$ y $f(4) > -2$

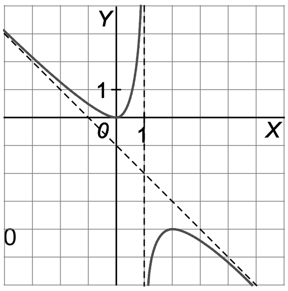


80. *Representa una función que verifique:

- **Crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(4,+\infty)$ y decrece en (0, 4).**
- **Sus extremos relativos son *A* (0, 6) y *B* (4, -3).**
- **$f''(x) > 0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y $f''(x) < 0$ en (-2, 2)**



81. La figura representa la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$. Obtén los números reales *a, b, c ,d* y *e*.



La función pasa por el origen de coordenadas luego $f(0) = 0$ y por tanto $c = 0$.

La función tiene una asíntota vertical en $x = 1$ luego $d + e = 0$.

La asíntota oblicua es $y = -x - 1$, luego $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{a}{d}=-1\Rightarrow a=-d$

$$n=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{(b+e)x}{dx+e}=-1\Rightarrow\frac{b+e}{d}=-1\Rightarrow b+e=-d\Rightarrow b+e+d=0\Rightarrow b=0$$

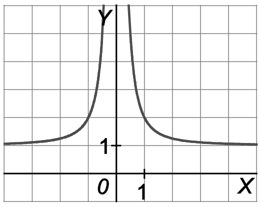
Sustituyéndolo en la función tenemos que $f(x)=\dfrac{ax^2}{-ax+a}=\dfrac{x^2}{1-x}$.

82. Halla el valor de *k* para que $f(x)=\dfrac{k+\ln x}{x^2}$ tenga un máximo relativo en *x* = *e*. ¿Cuál es su valor?

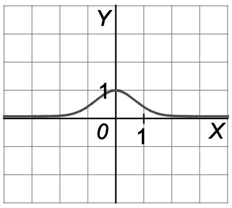
El dominio de la función es D (*f*) = (0,+∞) = 0 y su derivada es $f'(x)=\dfrac{1-2k-2\ln x}{x^3}$. Como queremos que *x* = *e* sea un máximo, $f'(e)=\dfrac{1-2k-2\ln e}{e^3}=0\Rightarrow 1-2k-2=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$. Además, para este valor se cumple que f' es positiva en (0, *e*) y negativa en (*e*, +∞) por lo que la función tiene un máximo relativo en $A\left(e,-\dfrac{1}{2e^2}\right)$.

83. Asocia cada función de la izquierda con la correspondiente gráfica de la derecha.

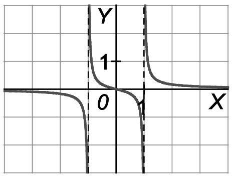
$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$



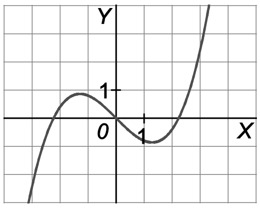
$f(x)=e^{-x^2}$



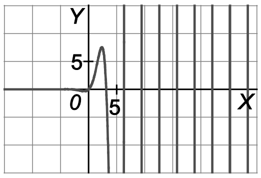
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$



$f(x)=\dfrac{x^3}{5}-x$



$f(x)=e^x \operatorname{sen} x$



84. Dada la función $f(x)=\frac{1}{8}x^4+ax^3-2x^2+bx-\frac{14}{3}$:

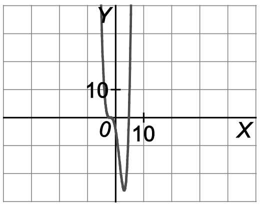
a) Calcula los valores de *a* y *b* para que tena un punto de inflexión en (–2, 0). Utiliza los valores hallados para *a* y *b* en el resto de los apartados.

b) Para los valores hallados *a* y *b,* traza la gráfica de la función tras estudiar el crecimiento, los extremos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión.

c) ¿En cuántos puntos corta *f* al eje de abscisas?

a) Como es un punto de inflexión tenemos que $f(-2)=0\Rightarrow 2-8a-8-2b-\frac{14}{3}=0\Rightarrow -4a-b=\frac{16}{3}$ y $f''(-2)=0\Rightarrow 6-12a-4=0\Rightarrow a=\frac{1}{6}\Rightarrow b=-6$ y la función es $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{6}x^3-2x^2-6x-\frac{14}{3}$.

b) Crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x-6=0\Rightarrow x=-2, x=3$, *f* crece en $(3,+\infty)$ y decrece en $(-\infty,3)$. Tiene un mínimo en $\left(3,-\frac{625}{24}\right)$.



Curvatura $f''(x)=\frac{3}{2}x^2+x-4=0\Rightarrow x=-2, x=\frac{4}{3}$, *f* es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ y es cóncava hacia abajo en $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$. Tiene un punto de inflexión en (-2, 0) y en $\left(\frac{4}{3},f\left(\frac{4}{3}\right)\right)\approx\left(\frac{4}{3},-15{,}43\right)$.

c) En la gráfica vemos que la función corta al eje de abscisas en dos puntos.

85. Calcula el valor de *k* para que la recta *y* = 2*x* – 5 sea asíntota oblicua de la función $f(x)=\frac{2x^3+kx^2-7x+3k}{x^2+3}$. Estudia el resto de las asíntotas de *f,* si es que existen.

Como la asíntota oblicua es *y* = 2*x* – 5, tenemos que $m=2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2-7x+3k}{x^2+3}:x\right)=2$ y que

$$n=-5=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2-7x+3k}{x^2+3}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^2-13x+3k}{x^2+3}=k\Rightarrow k=-5.$$

La función no tiene más asíntotas puesto que el dominio son todos los números reales, y por tanto no puede tener asíntotas verticales, y no puede tener asíntotas horizontales ya que tiene asíntota oblicua.

86. Para la función $f(x)=\frac{bx-1}{x^2-4x+4}$:

a) Halla el valor de *b* para que *f* tenga un extremo en el punto *x* = –1. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

b) Estudia, si es que existen, el resto de extremos relativos de la función.

a) Si tiene un extremo *x* = –1 entonces $f'(-1)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{-bx-2b+2}{(x-2)^3}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-b+2}{-27}=0\Rightarrow b=2$. Así,

$f'(x)=\frac{-2x-2}{(x-2)^3}$ y *f* es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ y crece en (-1,2), con lo que el extremo es un mínimo que además es absoluto.

b) La función no tiene más extremos.

87. Calcula, si es que existen, el valor o los valores de *m* para que la función $f(x)=\frac{x+m}{e^x}$:

a) Tenga un máximo relativo en $x = -2$.

b) Tenga un punto de inflexión en $x = 1$.

a) $f'(x)=-\frac{x+m-1}{e^x}\Rightarrow f'(-2)=-\frac{-3+m}{e^{-2}}=0\Rightarrow m=3\Rightarrow$ el punto $A(-2, e^2)$ es un máximo relativo pues la derivada es positiva si $x < -2$ y negativa si $x > -2$.

b) $f''(x)=\frac{x+m-2}{e^x}\Rightarrow f''(1)=\frac{m-1}{e}=0\Rightarrow m=1\Rightarrow$ el punto $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ es de inflexión pues la derivada segunda es negativa si $x < 1$ y positiva si $x > 1$.

CUESTIONES

88. ¿Cuál es el máximo número de asíntotas de cada tipo que puede tener la función racional $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ si grado(Q) = 2?

Al ser $Q(x)$ de grado 2, se anula en dos valores de x como máximo. Si $P(x)$ no se anula en ninguno de estos valores, $f(x)$ tendrá a lo sumo dos asíntotas verticales.

Al ser $P(x)$ un polinomio puede ocurrir que grado $P(x) \le 2$, por lo que $f(x)$ tendría una asíntota horizontal. Si grado $P(x) = 3$, $f(x)$ tendría una asíntota oblicua y si Grado $P(x) > 3$, $f(x)$ no tendría asíntotas ni horizontales ni oblicuas.

Así pues, el máximo número de asíntotas que puede tener $f(x)$ es 3.

89. Si $f(x)=Q(x)$ es una función polinómica de grado tres, justifica que su gráfica corta al menos una vez al eje X.

Cualquier polinomio $Q(x)$ de tercer grado tiene una raíz real a pues $\lim_{x\to-\infty} Q(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} Q(x)$ tienen diferente signo y como el polinomio es una función continua, $Q(x)$ corta al eje de abscisas al menos en el punto $(a, 0)$.

90. Determina si la función racional $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (grado(P) = 1 y grado(Q) = 3) tiene, al menos, una asíntota vertical.

Falso, $f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)}$ cumple las condiciones y sin embargo no tiene una asíntota vertical si no una discontinuidad evitable.

91. Calcula todas las asíntotas de la función $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$.

Como el $D(f)=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ la función no tiene asíntotas verticales ni horizontales ya que sus límites en $+\infty$ y en $-\infty$ dan ∞.

Asíntotas oblicuas:

$$m_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=-1 \text{ y } n_1=\lim_{x\to-\infty} f(x)-m_1x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=1\Rightarrow y=-x+1$$

$$m_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=1 \text{ y } n_2=\lim_{x\to+\infty} f(x)-m_2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1\Rightarrow y=x+1$$

92. Si $b^2 < 4c$, justifica que la gráfica de la función polinómica $P(x) = x^4 + 2bx^3 + 6cx^2 + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

Si existe un punto de inflexión debe anular $P''(x) = 12x^2 + 12bx + 12c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2a} \Rightarrow$ si $b^2 - 4c < 0$, la ecuación anterior no tiene ninguna raíz real por lo que $P''(x)$ nunca es **0** y $P(x)$ no tiene ningún punto de inflexión.

93. ¿Por qué la gráfica de cualquier función polinómica de tercer grado tiene un único punto de inflexión?

Sea una función polinómica de grado tres $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$, calculamos su primera y segunda derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + b$ y comprobamos que la ecuación $f''(x) = 6ax + b = 0$ sólo tiene una solución: $x = \frac{-b}{6a}$ ya que $f''(x)$ tiene distinto signo si $x < \frac{-b}{6a}$ o si $x > \frac{-b}{6a}$. Así que el único punto de inflexión de la gráfica de f es el de abscisa $x = \frac{-b}{6a}$.

94. Justifica que la gráfica de la función $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}$ es simétrica respecto del eje vertical.

$f(-x) = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 1 - \frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = 1 - \frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}} = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1} = f(x)$, la función tiene simetría respecto del eje de ordenadas.

95. Justifica que la función $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1}$ tiene tres asíntotas.

Asíntota vertical en $x = 0$: $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$

Asíntotas horizontales : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x} + \frac{2}{e^x}}{\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{-\infty} + 2}{e^{-\infty} - 1} = -2 \Rightarrow y = 2$ es otra asíntota horizontal. No hay asíntotas oblicuas al haber asíntotas horizontales por ambos lados.

96. Si $a > b > 0$, demuestra que la tangente a la gráfica de $f(x) = x(x - 2a)(x - 2b)$ en $P(a, f(a))$ pasa por $Q(2b, 0)$.

Calculemos la recta tangente a la gráfica de f para x = a. y probemos que la recta tangente en P pasa por Q(2b, 0). $f(x) = x^3 - 2(a + b)x^2 + 4abx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4(a + b)x + 4ab \Rightarrow f(a) = -a^3 + 2a^2b \quad f'(a) = -a^2$, y la recta tangente será $y - (-a^3 + 2a^2b) = -a^2(x - a)$ **.**

Por último comprobemos que el punto Q pertenece a la recta:

$$0 - (-a^3 + 2a^2b) = -a^2(2b - a) \Rightarrow a^3 - 2a^2b = -2a^2b + a^3$$

97. Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$, decreciente en (–∞, 0), creciente en (0, +∞) con *f* (0) = 1. ¿Cuál de las siguientes expresiones podría ser una fórmula para *f*?

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

d) $f(x) = e^x + 1$

La función buscada tiene un mínimo absoluto en *A*(0, 1). La función d) no puede ser porque no pasa por el punto *A*(0, 1) ya que *f*(0) =2.

La función b) no puede pues $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ se anulan en $x=\sqrt{2}-1, x=-\sqrt{2}+1$, crece en $\left(-\sqrt{2}+1, 0\right)$ y decrece en $\left(0, \sqrt{2}-1\right)$.

Las funciones a) y c) sí cumplen las condiciones del enunciado.

PROBLEMAS

98. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, *R*(*x*), en euros, viene dada en función de la cantidad invertida, *x* en euros (para 10 ≤ *x*), por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = -0{,}1\,x^2 + 50x + 250$$

a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b) ¿Qué rentabilidad obtendría?

a) Debemos hallar el máximo de *R*(*x*) siendo 10 ≤ *x.* La derivada es *R*'(*x*) = –0,2*x* + 50, que se anula si *x* = 250. Para este valor se consigue el máximo rendimiento, ya que la gráfica de *R*(*x*) es una parábola cóncava hacia abajo. Es decir, si se invierten 250 euros, se obtiene el rendimiento máximo.

b) *R*(250) = 6500. Se obtiene una rentabilidad de 6500 euros.

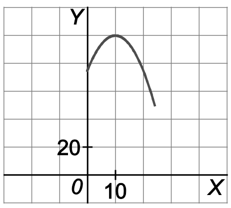
99. En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) de cierta válvula durante 24 horas de funcionamiento, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función:

$$R(t) = \frac{(30-t)(t+10)}{4}; \quad 0 \le t \le 24$$

a) ¿Cuánto tiempo debe permanecer funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento? Justifica la respuesta.

b) Representa y comenta la función.

a) La gráfica de la función es una parábola cóncava hacia abajo que tiene su máximo en su vértice. Así pues, este será el máximo si su abscisa pertenece al dominio.



La función rendimiento es $R(t) = \dfrac{-t^2+20t+300}{4}$; su derivada es

$R'(t) = \dfrac{-2t+20}{4} = 0 \Rightarrow t = 10$ que pertenece al dominio y podemos afirmar que el máximo rendimiento se alcanza a las 10 horas de funcionamiento de la válvula.

b) El vértice de la parábola es el punto *V*(10, R(10)) = *V*(10, 100). La máquina empieza con un rendimiento del 75 % (el punto de corte con Y es *A*(0, 75)) y va aumentando hasta conseguir el 100 % de rendimiento a las 10 horas. A partir de ahí va disminuyendo hasta llegar a un rendimiento del 51 % (*R*(24) = 51).

100. Un importador de caviar estima que si vende el kilogramo de caviar a x euros, entonces su beneficio por kilogramo viene dado por la función $B(x) = 160x - x^2 - 63\ 000$.

a) Indica entre qué precios obtiene beneficios el importador.

b) Calcula a qué precio debe vender el kilogramo de caviar para obtener un beneficio máximo.

c) Calcula el beneficio máximo por kilogramo.

a) La función $B(x) = 160x - x^2$-6300 corta el eje X en los puntos $A(70, 0)$ y $B(90, 0)$. Como la función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, será positiva entre $x = 70$ y $x = 90$. Así pues, se obtienen beneficios si el precio de venta del kilo de caviar está comprendido entre 70 y 90 euros.

b) La función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el máximo se encuentra en su vértice, cuya abscisa es el valor que anula la derivada, $B'(x) = 160 - 2x = 0$, $x = 80$. Si vende el kilo de caviar a 80 euros, obtiene el beneficio máximo.

c) $B(80) = 100$. Es decir, el beneficio máximo por kilo es de 100 euros.

101. Las ganancias de una empresa, en miles de euros, se ajustan a la función $f(x) = \dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, (si x > 0).

a) Representa gráficamente la función $y = f(x)$ para $x \in (-\infty, +\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

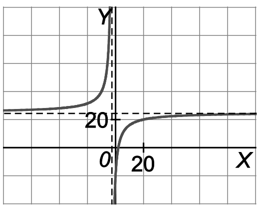
a) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

Corte con los ejes. Corta el eje Y en el punto $A(0, f(0)) = A(0, -20)$ y el eje X en el punto $B(2, 0)$.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^-} \dfrac{50x-100}{2x+5} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^+} \dfrac{50x-100}{2x+5} = -\infty \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25 \Rightarrow y = 25$.

Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = \dfrac{450}{(2x+5)^2} > 0$; por tanto, la función es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos.



b) La empresa deja de tener pérdidas a partir del segundo año; a partir de $x = 2$, la función es positiva.

c) Los beneficios están limitados por 25 000 euros, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Estudia el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{4x^3}{9-x^2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4x^3}{9-x^2}=\left[\dfrac{-108}{0^-}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{4x^3}{9-x^2}=\left[\dfrac{-108}{0^+}\right]=-\infty \Rightarrow x=-3$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{4x^3}{9-x^2}=\left[\dfrac{108}{0^+}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{4x^3}{9-x^2}=\left[\dfrac{108}{0^-}\right]=-\infty \Rightarrow x=3$

No tiene asíntotas horizontales porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3}{9-x^2}:x\right)=-4$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^3}{9-x^2}-(-4)x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{36x}{9-x^2}=0\Rightarrow y=-4x$

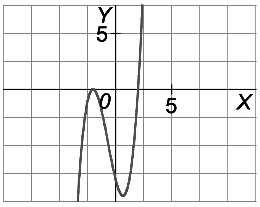
b) $D(f)=(0,+\infty)$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty\Rightarrow x=0$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}:x\right)=+\infty\Rightarrow$ no tiene asíntotas oblicuas.

2. Estudia la función polinómica $f(x) = (x - 2)(x + 2)^2$ y con los resultados obtenidos, traza su gráfica.



Como es una función polinómica $D(f)=\mathbb{R}$.

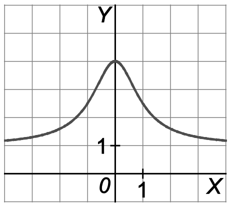
Cortes con los ejes: $A(0, -8)$, $B(-2, 0)$ $C(2, 0)$

La función no tiene asíntotas por ser polinómica.

Crecimiento: $f'(x)=3x^2+4x-4\Rightarrow x=-2, x=\dfrac{2}{3}$. La función crece en $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$, decrece en $\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$, $B(-2, 0)$ es un máximo relativo y $D\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{-256}{27}\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura: $f''(x)=6x+4\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$. La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$, cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$, $E\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{128}{27}\right)$ es un punto de inflexión.

3. Dibuja la gráfica de la función racional, $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$ tras realizar un estudio completo de la misma.



$D(f)=\mathbb{R}$

La función corta al eje de ordenadas en $A(0, 4)$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2+1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2+1}=1 \Rightarrow y=1$

Crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-6x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=0$.

La función crece en $(-\infty,0)$, decrece en $(0,+\infty)$. $A(0, 4)$ es un máximo absoluto de la función.

Curvatura: $f''(x)=\dfrac{18x^2-6}{\left(x^2+1\right)^3}\Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. Calcula, en cada caso, los posibles valores de *a* y *b* para que la función racional $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x+b}$ tenga:

a) Por asíntota oblicua la recta $y = 3x - 3$.

b) Un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

a) Queremos: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+1}{x+b}:x\right)=a\Rightarrow a=3$

Además, $n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx=-3\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3bx}{x+b}\right)=-3b=3\Rightarrow b=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+1}$

b) Como $f'(x)=\dfrac{ax^2+2abx-1}{(x+b)^2}\Rightarrow f'(-1)=\dfrac{a-2ab-1}{(-1+b)^2}=0\Rightarrow a-2ab-1=0\Rightarrow b=\dfrac{a-1}{2a}$. La función *f* tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ para cualquier valor de *a* salvo si $a = -1$ (pues el denominador se anula para $x = -1$) o si $a = 0$.

5. La gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+c}$ puede tener una, dos o tres asíntotas. Hay un solo valor de *c* para el que tiene exactamente dos asíntotas. Encuéntralo.

Sea cual fuere *c* la gráfica de f tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.

Si $x^2 + 2x + c = 0$, habrá asíntotas verticales, $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4c}}{2}$ y como solo queremos que haya una asíntota tiene que ocurrir $4 - 4c = 0$, esto es, $c = 1$, y así, el denominador se anula una sola vez, en $x = -1$ y la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical.

6. La gráfica de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ tiene una asíntota oblicua por la derecha. Encuentra la ecuación de dicha asíntota.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}:x\right)=1$.

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-1}\right)}\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ La recta $y=x+\dfrac{1}{2}$ es la asíntota buscada.

7. ¿Cuántos puntos de intersección tienen las gráficas de $f(x)=2-x$ y $g(x)=\sqrt{x}$?

Igualamos las dos funciones y resolvemos la ecuación $2-x=\sqrt{x}\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=4\end{cases}$. Pero $x=4$ no cumple $2-x=\sqrt{x}$. Las dos funciones se intersecan en el punto (1,1).

8. Para la función $f(x)=(2x-1)e^{-x}$.

a) Estudia su monotonía y sus extremos relativos.

b) Determina su concavidad y sus puntos de inflexión.

a) $f'(x)=(-2x+3)e^{-x}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$, f crece en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. El punto $\left(\frac{3}{2},\frac{4}{\sqrt{e^3}}\right)$ es el máximo relativo de la función.

b) $f''(x)=(2x-5)e^{-x}=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$, f es cóncava hacía abajo en $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ y cóncava hacía arriba en $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$. El punto $\left(\frac{5}{2},\frac{6}{\sqrt{e^5}}\right)$ es un punto de inflexión de la función.

9. Dada la función $f(x)=x^3\ln\left(x^2\right)$.

a) Estudia su dominio y posibles simetrías.

b) Estudia el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y la función es simétrica respecto del origen de coordenadas pues $f(-x)=(-x)^3\ln\left((-x)^2\right)=-x^3\ln\left(x^2\right)=-f(x)$.

b) $f'(x)=3x^2\ln\left(x^2\right)+2x^2\Rightarrow x=-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},x=\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e}$, f crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e}\right)$ y el punto $A\left(-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},f\left(-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e}\right)\right)=A\left(-\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},0{,}25\right)$ es un máximo relativo y el punto $B\left(\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},f\left(\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e}\right)\right)=B\left(\frac{\sqrt[6]{e^4}}{e},-0{,}25\right)$.

10. Comprueba que función $f(x)=\ln\left(e^x+e^{1-x}\right)$.tiene un mínimo absoluto y encuentra la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x+1}}{e^x+e^{-x+1}}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Si $x<\frac{1}{2}$ se cumple que $e^x < e^{1-x}$ por lo que la función es decreciente y si $x>\frac{1}{2}$ tenemos que $e^x > e^{1-x}$ por lo que la función es creciente y por tanto en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\ln 2\right)$ es un mínimo absoluto de la gráfica de la función.

La ecuación de la recta tangente que pasa por ese punto cuya pendiente es cero $y=\frac{1}{2}+\ln 2$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta

1. Si $f(x)$ es una función polinómica de cuarto grado, su gráfica:

A. Tiene que presentar tres puntos con tangente horizontal.

B. Tiene que tener al menos dos puntos máximos o mínimos relativos.

C. Es seguro que presenta algún punto con tangente horizontal.

D. Pueden no coincidir $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

A. Es falsa. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ solo tiene un punto con tangente horizontal: (0, 0).

B. Es falsa. Sirve el mismo contraejemplo que en A, ya que la función $f(x) = x^4$ solo tiene un mínimo: (0, 0)

C. Es verdadera. Como f'(x) es un polinomio de grado tres y $\text{signo}\left(\lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) \neq \text{signo}\left(\lim_{x\to-\infty} f'(x)\right)$ la función pasa de ser creciente a decreciente al menos una vez y, por tanto, tendrá al menos un extremo relativo.

D. Es falsa por ser un polinomio de grado par.

2. El número de asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)(x - 3)}$ es:

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 5

La respuesta correcta es la D. Las asíntotas de la función son $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. Si la gráfica de una función polinómica de tercer grado $y = f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto de abscisa 1 y un mínimo relativo en $x = 3$, entonces:

A. Existen números a para los que la ecuación $f(x) = a$ no tiene soluciones reales.

B. Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente tres raíces reales.

C. Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

D. La gráfica de $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

Para resolver este problema es útil trazar la gráfica de una función que verifique las hipótesis.

A. Es falsa. Como una función polinómica de tercer grado es una función continua y $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to-\infty} f(x) < 0$, el recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$, podemos afirmar que la ecuación $f(x) = a$ siempre tiene al menos una solución real.

B. Es verdadera. Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene tres soluciones, una menor que 1, otra entre 1 y 3, y la tercera mayor que 3.

C. Es verdadera. Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, entonces $f(3) < 0 < f(1)$, y estamos en las hipótesis de B.

D. Es verdadera. Los polinomios de tercer grado son simétricos respecto de su punto de inflexión y, por tanto, la abscisa del punto de inflexión está entre las abscisas de sus extremos relativos.

4. Sea $f(x) = e^x P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de tercer grado. Entonces:

A. La gráfica de $y = f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

B. La gráfica de $y = f(x)$ corta al menos tres veces al eje horizontal.

C. Puede haber varios puntos con tangente horizontal.

D. La gráfica de f no puede tener asíntotas oblicuas.

A. Es falsa. $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x P(x) = 0$ cualquiera que sea el polinomio $P(x)$.

B. Es falsa. La función vale 0 si $P(x) = 0$ y un polinomio de grado 3 no siempre tiene tres raíces reales.

C. Es verdadera. $f'(x) = e^x \left(P(x) + P'(x)\right)$ y, como $P(x) + P'(x)$ es un polinomio de tercer grado, puede anularse hasta tres veces.

D. Es verdadera. En $-\infty$ tiene una asíntota horizontal, y en $+\infty$, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x P(x)}{x} = +\infty$ cualquiera que sea $P(x)$, no tiene asíntota oblicua.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. Sea *f* una función definida en el conjunto de los números reales, de la que se sabe lo siguiente:

1. La gráfica de *f* presenta alguna asíntota horizontal.

2. La gráfica de *f* presenta alguna asíntota oblicua.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

La respuesta correcta es la D. Nada de lo anterior. Hay gráficas de funciones que solo tienen asíntota horizontal; otras que solo tienen asíntota oblicua, y otras que tienen una asíntota oblicua en más infinito y una asíntota horizontal en menos infinito.

Señala el dato innecesario para contestar

6. Para encontrar las abscisas de los posibles extremos relativos de la función $f(x) = e^{ax^3+bx^2+cx+d}$ se dispone de:

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c***

A. Es innecesario el dato 1.

B. Es innecesario el dato 2.

C. Es innecesario el dato 3.

D. Hacen falta todos los datos.

Respuesta D. Hacen falta los tres datos. Las abscisas de los extremos relativos son aquellas que anulan la derivada: $f'(x) = \left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^{ax^3+bx^2+cx+d}$. Dicha derivada será cero si $3ax^2 + 2bx + c = 0$, es decir, depende de lo que valgan los parámetros *a*, *b* y *c*.