Matemáticas
1° Bachillerato
Solucionario

Autor del libro del profesor
Rafael Ángel Martínez Casado

Autores del libro del alumno
José María Martínez Mediano
Rafael Cuadra López
Francisco Javier Barrado Chamorro

McGraw Hill

MADRID • BARCELONA • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

The McGraw·Hill Companies

McGraw Hill Educación

MATEMÁTICAS 1

SOLUCIONARIO DE 1º DE BACHILLERATO

McGraw—Hill/Interamericana de España, S.A.U.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: **978—84—481—5516—2**
Depósito legal:

Editor del proyecto: **Mariano García Díaz**
Editor: **Argos Gestión de Proyectos**
Técnico editorial: **Alfredo Horas de Prado**
Revisores técnicos: **Rafael Ángel Martínez Casado**
Revisoras de ejercicios: **María Teresa Ibáñez León y Rosario Sanz Mesa**
Ilustradores: **Ana Colera Cañas y Pablo Vázquez Rodríguez**
Diseño interior: **Germán Alonso**
Maquetación: **Argos Gestión de Proyectos**

Impreso en:

IMPRESO EN ESPAÑA — PRINTED IN SPAIN

Índice

Actividades

1. Le resto nueve unidades a un número y me da lo mismo que si lo divido por 3. ¿De qué número se trata?

$x-9=\dfrac{x}{3} \Rightarrow x=13,25$

2. Disponemos de una cuba llena de vino y de dos recipientes con capacidad de 8 y 5 litros. ¿Qué tienes que hacer para medir dos litros de vino? (Puedes traspasar vino de un recipiente a otro y emplear la cuba para vaciar o coger vino).

	Recipientes		
	Cuba, x litros	De 8 litros	De 5 litros
Paso 1	$x-5$	0	5
Paso 2	$x-5$	5	0
Paso 3	$x-10$	5	5
Paso 4	$x-10$	8	2

3. Con cuatro cuartos, unidos y ligados por las cuatro operaciones elementales, pueden obtenerse los números naturales del 0 al 9. Por ejemplo:
0−4−4+4−4;   1−(4+4)/(4+4)
Obtén los demás.

$2=4/4+4/4$ $\quad 3=(4+4+4)/4$
$4=(4-4)/4+4$ $\quad 5=(4\cdot 4+4)/4$
$6=4+(4+4)/4$ $\quad 7=4+4-4/4$
$8=\dfrac{4}{4/4}+4$ $\quad 9=4+4+(4/4)$

4. Se reparte cierta cantidad de dinero entre varias personas del siguiente modo: a la primera se le da 1/4 del dinero inicial; a la segunda, 1/4 de lo que resta más 1 000 €; a la tercera, 1/4 de lo que queda más 2 000 €; y así sucesivamente. Al final, todos han recibido la misma cantidad. ¿Cuánto dinero recibe cada persona y cuántas son?

$\dfrac{1}{4}x=1\,000+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{4}x\right) \Rightarrow x=16\,000$

Cada persona recibe 4 000 €. Hay cuatro personas.

Problemas propuestos

Tipo I: Problemas de prueba-ensayo y de recurrencia

1. ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una cadena de 30 triángulos como se indica en la siguiente figura?

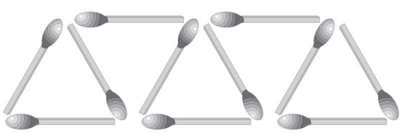


Fig. 1.1.

Para el primer triángulo necesitamos 3 cerillas. Para cada uno de los siguientes, 2 cerillas más.
Por tanto, se necesitan: $3+29\cdot 2=61$ cerillas.

2. Divide cada una de las siguientes figuras en cuatro figuritas semejantes a la inicial. Te damos la solución de una de ellas.

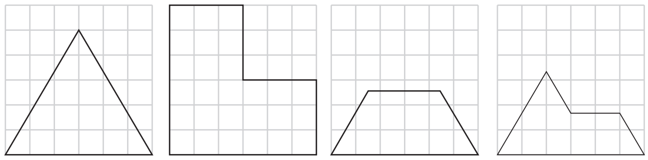


Fig. 1.2.

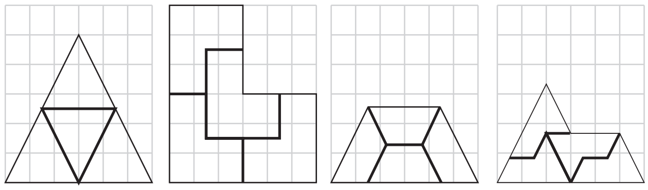


Fig. 1.3.

3. Observa las siguientes igualdades:
$1=1$
$1+3=4$
$1+3+5=9$
$1+3+5+7=16$
a) ¿Sabrías decir el resultado de la suma de los diez primeros números impares?
b) ¿Y el resultado de $1+3+5+7+\ldots+75+79$?

a) $1+3+5+7+\ldots+19=10^2=100$.
Puede observarse que la suma de los n primeros números impares vale n^2.
Nota: Esta cuestión podría proponerse para demostrarla por el método de inducción.

b) $1+3+5+7+\ldots+75+79=40^2=1\,600$.

4. ¿Qué cifra corresponde a cada raya para que sea correcto el producto?
_ _ _ 4 _ _ × 7 = 6 743 _ 56

La última cifra del primer factor tiene que ser 8, pues es la única que multiplicada por 7 acaba en 6.
Se tiene: _ _ _ 4 _ 8 × 7 = 6 743 _ 56
Los sucesivos pasos son:
_ _ _ 408 × 7 = 6 743 _ 56 → _ _ _ 408 × 7 = 6 743 856
Ahora, basta con dividir 6 743 856 entre 7. Se obtiene 963 408.

5. Vuelve a leer el Ejemplo 2º de la sección 1.3. Contesta a la pregunta que se hizo: ¿cómo es *C*?

Si A es bueno, como dice la verdad $\Rightarrow B$ es bueno $\Rightarrow A=C \Rightarrow$
$\Rightarrow$ C es bueno.
Si A es malo, como dice la mentira $\Rightarrow B$ es malo $\Rightarrow A\neq C \Rightarrow$
$\Rightarrow C$ es bueno.
En cualquier caso, C es bueno.

6. ¿En qué número termina 2^{28}? A partir del resultado hallado, indica en qué número termina 2^{183} y 2^{185}.

Las terminaciones posibles son 2, 4, 8 y 6.
$2^1 \rightarrow 2$ $\quad 2^5 \rightarrow 32$ $\quad 2^{4n+1} \rightarrow 2$

$2^2 \to 4 \qquad 2^6 \to 64 \qquad 2^{4n+2} \to 4$
$2^3 \to 8 \qquad 2^7 \to 128 \qquad 2^{4n+3} \to 8$
$2^4 \to 16 \qquad 2^8 \to 256 \qquad 2^{4n} \to 6$
Luego:
2^{28} termina en 6.
$2^{183} = 2^{4 \cdot 45 + 3}$ termina en 8.
$2^{185} = 2^{4 \cdot 46 + 1}$ termina en 2.

7. En un viejo papel hemos encontrado la siguiente nota de una venta realizada. Dice así:
72 pollos, a _ _ pesetas el pollo = _19_ pesetas.
Las rayas indican números que se han borrado.
¿A cómo estaría el pollo en aquellos tiempos?

Como 72 es múltiplo de 9 y de 2, el resultado del producto debe ser múltiplo de 9 y par. En consecuencia, sus cifras deben sumar 9, 18 o 27.
Terminando el número en cifra par, tenemos las siguientes posibilidades:
_190, _192, _194, _196, _198
Y para que sea múltiplo de 9:
8 190, 6 192, 4 194, 2 196, 9 198
De estos números, el único divisible por 72 es 6 192 $\to$ $6\,192 = 72 \cdot 86$.
El precio del pollo era de 86 pts.

8. Supón que tienes 9 bolas de igual aspecto y tamaño. Sólo hay un inconveniente: una de ellas tiene un peso ligeramente distinto de las demás; en compensación dispones de una balanza de platillos. ¿Qué número mínimo de pesadas necesitas hacer para averiguar cuál es la bola distinta?

Éste es un viejo y conocidísimo problema. Lo más importante de él es el método, la estrategia; y que pone de manifiesto la fuerza de la lógica.
En estos problemas no se trata de acertar por suerte; si así fuese, en 1 de cada 9 casos acertaríamos por puro azar. Se trata de que el método funcione siempre, sea cual sea nuestra suerte.
Dicho esto, analiza: ¿qué datos tengo?; ¿qué sé con certeza?
Tienes 9 bolas: 8 iguales y 1 distinta; pero sólo 1 distinta.
Tienes, además, una balanza que puede servir para comparar el peso de las bolas. A partir de aquí necesitas una estrategia.
Tienes varias opciones:
Primera: Comparar las bolas una a una. Si la balanza queda en equilibrio las bolas son iguales; si se inclina, alguna de esas dos bolas es distinta, pero no sabes cuál de ellas es la «mala». Con esta estrategia, en el peor de los casos, puedes necesitar hasta 5 pesadas, que serían:

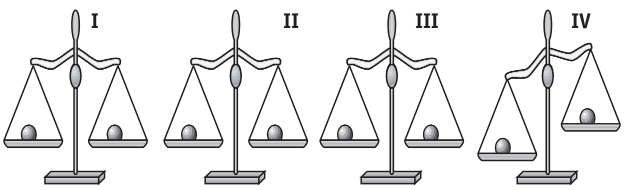


Fig. 1.4.

En las pesadas I, II y III sabes que todas las bolas son buenas. En la IV, alguna de las dos es la distinta. Si la balanza se inclina como indicamos haremos otra pesada comparando la bola de la izquierda, la más pesada, con alguna de las bolas buenas. En esta quinta pesada puede suceder: (a) que la balanza quede en equilibrio, con lo cual, la bola distinta es la otra, la que estaba en el platillo derecho; además pesa menos que las otras. (b) que la balanza vuelva a inclinarse en el mismo sentido, de donde la bola mala es la que hemos tomado; además es más pesada.
—Si las cuatro pesadas primeras quedaran en equilibrio, la bola mala es la última. Comparada con cualquiera de las otras podemos deducir si pesa más o menos.
—Si la pesada desequilibrada es la I, II o III se puede deducir antes cuál y cómo es la bola mala.
Segunda: Comparar las bolas dos a dos. Con este procedimiento puedes necesitar hasta cuatro pesadas. (Te dejamos que lo compruebes por tu cuenta).
Tercera: Comparar las bolas de tres en tres.
Puede suceder:
(I) Pesada en equilibrio: $\Rightarrow$ La bola mala está entre las otras tres. Comparando estas tres bolas una a una se determina la mala.

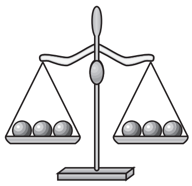


Fig. 1.5.

(II) Pesada inclinada a la izquierda: $\Rightarrow$ Las otras tres bolas son buenas. Quitamos tres bolas de la derecha y en su lugar ponemos las tres bolas buenas. Puede suceder:

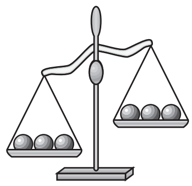


Fig. 1.6.

—La balanza se queda en equilibrio $\Rightarrow$ la bola mala está entre las tres quitadas, y pesa menos. Ponemos dos de esas bolas, una en cada platillo: si queda en equilibrio, la bola mala es la otra; si se desequilibra, la bola mala es la de la más ligera.

Tipo II: Problemas de tipo algebraico: ecuaciones y sistemas

9. Le sumo 20 unidades a un número y me da lo mismo que si lo multiplico por 3. ¿De qué número se trata?

Si x es el número buscado, se cumple: $x + 20 = 3x \;\Rightarrow\; x = 10$.

10. José María dobla los años a Cristina; Carmen es tres años mayor que Cristina; y José María, cuatro más que Catalina. Si la suma de todas las edades es 29, ¿cuál es la edad de cada uno?

Edades: Cristina $= x$; José María $= 2x$; Carmen $= x + 3$;
Catalina $= 2x - 4$

$x + 2x + x + 3 + 2x - 4 = 29 \Rightarrow x = 5$
La edad de José María es 10 años.
La edad de Carmen es 8 años.
La edad de Catalina es 6 años.
La edad de Cristina es 6 años.

11. A una cuba de vino, inicialmente llena, se le extrae un sexto de su capacidad más 15 litros. Si añadiendo un cuarto de su capacidad éste vuelve a llenarse, ¿cuántos litros caben en la cuba?

Capacidad de la cuba $= x$

Se extrae: $\dfrac{x}{6} + 15$.

Se añade: $\dfrac{x}{4}$.

Como $\dfrac{x}{6} + 15 = \dfrac{x}{4} \Rightarrow$ x = 180 litros.

12. El triple de un número es la mitad de otro. ¿Qué números son?

Si los números son a y b, entonces: $3a = \dfrac{b}{2} \Rightarrow b = 6a$

Hay infinidad de posibilidades.

13. El triple de un número es la mitad de otro. Si entre los dos suman 56, ¿qué números son?

Se tiene: $b = 6a$ y, además, $a + b = 56 \Rightarrow a = 8$; $b = 48$.

14. El triple de un número es la mitad de otro. Si entre los dos suman 56 y su diferencia es 40, ¿qué números son? (¿Observas algo extraño en el enunciado?)

La solución es la misma que la del problema anterior. (Puede observarse que la diferencia entre los dos números es 40).
Nota: Con este problema se trata de ver que sobra un dato. Afortunadamente, este dato sobrante no es contradictorio con los otros dos, lo cual permitiría resolver el problema conociendo dos datos cualesquiera de los tres dados.

Tipo III: Problemas de tipo geométricos

15. Un ángulo mide dos grados menos que el triple de su complementario. ¿Cuánto vale?

Si x es el ángulo buscado, su complementario mide $90 - x$.
Entonces:
$x = 3 \cdot (90 - x) - 2 \Rightarrow x = 67$.

16. La superficie de un triángulo isósceles de altura 4 cm es 12 cm². Halla su base. ¿Cuánto miden los otros dos lados si la suma de sus longitudes es 4 cm más que la base?

Área: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 12 = \dfrac{b \cdot 4}{2} \Rightarrow b = 6$.

Lado $= l \Rightarrow 2l = 6 + 4 \Rightarrow l = 5$.

Observa: En este problema sobra un dato. ¿Se darán cuenta los alumnos? Si no es así, que lo descubran haciendo el problema número 20.

17. La superficie de un cuadrado es S, ¿cuál será la superficie de un cuadrado cuyo lado es el doble del anterior?

Si el lado del cuadrado pequeño es l se tiene: $S = l^2$.
Si se dobla el lado $L = 2l$, la superficie será $L^2 = (2l)^2 = 4l^2 = 4S$ $\rightarrow$ queda multiplicada por $2^2 = 4$.
Nota: Podría plantearse con otros aumentos proporcionales del lado ($L = kl$) y comprobar que la razón entre las superficies es k^2.

18. En un cubo de arista a caben 111 litros de agua. ¿Cuántos litros puede contener un cubo cuya arista es el doble del anterior? ¿Es necesario conocer el valor de a?

El volumen del cubo inicial es a^3. El volumen del de doble arista será: $V = (2a)^3 = 8a^3$, que valdrá $8 \cdot 111 = 888$ litros.
No es preciso conocer a.

19. Dibuja una circunferencia con un lápiz y una regla.

Se dibuja un punto, que será el centro, y se coloca la regla como se indica, trazando una línea.

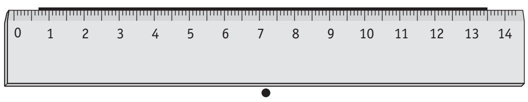


Fig. 1.7.

Girando la regla, manteniendo el punto en contacto con ella, se trazan otras rectas, obteniéndose un dibujo como el siguiente.
La circunferencia es la “envolvente” de todas esas rectas, que son tangentes a la circunferencia.

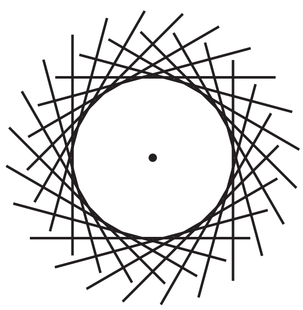


Fig. 1.8.

Tipo IV: Problemas resolubles mediante fórmulas

20. La superficie de un triángulo isósceles de altura 4 cm es 12 cm². Halla su base y los otros dos lados.

Por el Problema 28, $b = 6$.
Como es un triángulo isósceles la altura cae en el punto medio de la base.
Podemos aplicar el teorema de Pitágoras: $l^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow l = 5$ cm.

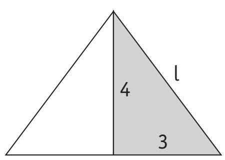


Fig. 1.9.

21. **Un ciclista parte de Badajoz con destino a Cáceres, que está a 90 km de distancia. Una hora después otro ciclista inicia el mismo itinerario, recorriendo cada hora 10 km más que el primero. Si llegan a Cáceres en el mismo instante, ¿qué tiempo tardó cada uno?**

Primer ciclista:

Velocidad $= v$; tiempo $= t \Rightarrow v = \dfrac{90}{t}$

Segundo ciclista:

Velocidad $= v'$; tiempo $= t'$, con $t' = t - 1$ y $v' = \dfrac{90}{t-1}$

Como $v' = v + 10 \Rightarrow \dfrac{90}{t-1} = \dfrac{90}{t} + 10 \Rightarrow t^2 - t - 9 = 0 \Rightarrow t = 3{,}54$

$h \approx 3$ h, 32 min.

22. **Con un trozo rectangular de cartón, que es 4 cm más largo que ancho, se construye una caja sin tapa de volumen 840 cm³, cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. ¿Qué dimensiones tenía el cartón?**

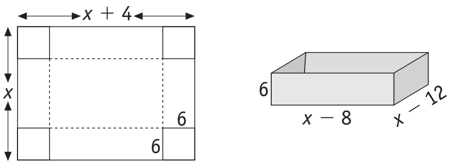


Fig. 1.10.

$(x - 8) \cdot (x - 12) \cdot 6 = 840 \Rightarrow x^2 - 20x - 44 = 0 \Rightarrow x = 22$

Tipo V: Reducción a la unidad

23. **Tres amigos ganan por un trabajo 1 105 €. ¿Cuánto les corresponde a cada uno de ellos si uno trabajo 8 días, otro 5 y el otro 4?**

En total trabajaron 17 días. A cada día le corresponden $\dfrac{1\,105}{17} \cong 65$ €.

Uno cobrará $8 \cdot 65 = 520$ €; otro, $5 \cdot 65 = 325$; y el tercero, $4 \cdot 65 = 260$ €.

24. **Si 6 gatos pueden comer 6 sardinas en 6 minutos, ¿cuántos gatos serán necesarios para comer 100 sardinas en 50 minutos?**

Cada gato se come una sardina en 6 minutos.
Para comerse 100 sardinas, un gato necesitaría 600 minutos.
Para comerse las 100 sardinas en 50 minutos se necesitarán 12 gatos.

25. **¿Cuántos litros de aceite de 2,90 €/L hay que mezclar con 200 litros de 3,60 €/L, para que la mezcla resulte a 3,40 €/L?**

Litros de $2{,}90 = x$.
$2{,}90x + 3{,}60 \cdot 200 = 3{,}40 \cdot (x + 200) \Rightarrow x = 80$ L.

26. **¿Cuántos mapas del mismo tamaño que el de escala 1: 200 000 habrá que hacer para reproducir la misma superficie a escala 1: 50 000?**

A escala 1: 200 000, 1 cm² del mapa $= 4$ km² en la realidad.
A escala 1: 50 000, 1 cm² del mapa $=$
$= (50\,000 \cdot 50\,000 = 2\,500\,000\,000$ cm²$) = 0{,}25$ km² en la realidad.
Por tanto, habrá que hacer $4/(0{,}25) = 16$ mapas de escala 1: 50 000.

Tipo VI: Estrategia hacia atrás

27. **Dos jugadores pueden sumar uno, dos o tres al número que diga el otro. Comienzan en cero y gana el primero que llegue a 37. ¿Qué hay que hacer para ganar?**

La secuencia del ganador debe ser:
37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1
Ganará el que comience el juego y siga esta secuencia, de derecha a izquierda.

28. **Dos jugadores pueden sumar desde uno hasta diez al número que diga el otro. Comienzan en cero y gana el primero que llegue a 100. ¿Cómo hay que hacer para ganar?**

Gana el que comienza y sigue esta secuencia:
1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100
Nota: Podría plantearse un juego con las mismas reglas, pero el que pierde es el que se vea obligado a decir 100. ¿Cuál debe ser la secuencia del ganador?

29. **Aquí tienes tres trozos de cartulina. Haz un corte en cada cartulina, de forma que queden seis piezas que puedan juntarse para formar un cuadrado.**

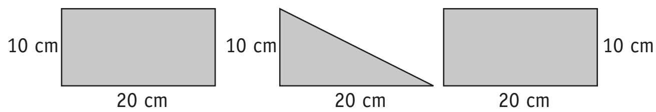


Fig.1.11.

El cuadrado final debe tener una superficie que será la suma de las superficies de los tres trozos dados:
$20 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 20 \cdot 10 = 500 \Rightarrow$ serás un cuadrado de lado $\sqrt{500}$, que es la mediada de la diagonal (y de la hipotenusa) de los rectángulos.

10 cuestiones básicas

1. **¿Qué error se comete en las siguientes igualdades?**

a) $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2$; **b)** $\dfrac{4x^2 + 2}{x^2} = 4 + 2$;

c) $-x^2 = (-x)^2 = x^2$

a) El cuadrado de una suma no es la suma de los cuadrados.

b) Se simplifican factores, no sumandos: $\dfrac{4x^2 + 2}{x^2} = 4 + \dfrac{2}{x^2}$.

c) $-x^2 = -x \cdot x = -(x^2)$, siempre es negativo.

$(-x)^2 = x^2$, siempre es positivo.

2. **Expresa mediante una igualdad las siguientes sentencias:**
a) El doble de x más 3 es igual a y.

b) El doble de *x*, más 3, es igual a *y*.
c) El cuadrado del doble de *x* es igual a la mitad de *y*.

a) $2 \cdot (x+3) = y$
b) $2x + 3 = y$
c) $(2x)^2 = \dfrac{y}{2}$

3. ¿Qué dice el teorema de Pitágoras? ¿Porqué el triángulo de lados 3, 4 y 5 cm es rectángulo, mientras que el de lados 10, 12 y 15 cm no lo es?

En el triángulo de lados 3, 4 y 5 se cumple que $5^2 = 3^2 + 4^2$; esto es, el teorema de Pitágoras.
En el triángulo de lados 10, 12 y 15 no se cumple que $15^2 = 10^2 + 12^2$; por tanto no puede ser rectángulo.

4. En un mapa a escala 1:100 000, ¿cuál es la distancia real entre dos ciudades que están separadas 3 cm en el mapa?

$3 \cdot 100\,000 = 300\,000$ cm = 3 km.

5. ¿Cómo medirías un litro de agua si tienes dos recipientes de 3 y 5 litros?

(1) Llenas el recipiente de 3 litros $\rightarrow$ lo viertes en el de 5.
(2) Vuelves a llenar el recipiente de 3 litros $\rightarrow$ lo viertes en el de 5 hasta que se llena.
En el recipiente de 3 litros queda 1 litro.

6. Una camisa valía 72 euros. ¿Cómo calcularías con una simple multiplicación su valor si se ha rebajado un 16 %?

$72 \cdot (1 - 0{,}16) = 72 \cdot 0{,}84 = 60{,}48$ €

7. ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo? ¿Y los ángulos de un pentágono?

Triángulo: 180º.
Un pentágono puede descomponerse en tres triángulos $\rightarrow$ sumarán $3 \cdot 180 = 540$.

8. ¿Qué mismo número hay que añadir a los dos términos de la fracción $\dfrac{3}{8}$ para que resulte equivalente a $\dfrac{7}{8}$?

$\dfrac{3+x}{8+x} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow x = 32$

9. La suma de dos números consecutivos es 147. Hállalos.

$x + (x+1) = 147 \Rightarrow$ 73 y 74

10. Sabiendo que $123^2 = 15\,129$, halla sin calculadora $121 \cdot 125$. (Recuerda que $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$).

$121 \cdot 125 = (123 - 2)(123 + 2) = 123^2 - 4^2 = 15\,129 - 4 = 15\,125$

Actividades

1. Representa los números reales:

a) $\frac{16}{9}$ b) $-0{,}47$ c) $\sqrt{13}$

a) Como $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$, dividimos el intervalo [1, 2] en nueve partes iguales, coincidiendo la séptima con el número dado.

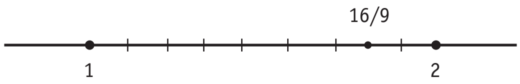


Fig. 2.1.

b) Hallamos el punto $-0{,}47$ mediante subdivisiones del intervalo $[-1, 0]$ y posteriormente del $[-0{,}5, -0{,}4]$:

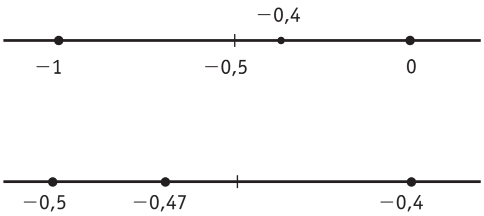


Fig. 2.2.

c) Procedemos a realizar la construcción gráfica de la Figura:

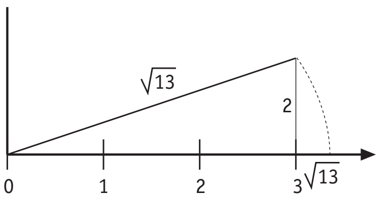


Fig. 2.3.

2. Encuentra y señala en la recta real los puntos cuya distancia a −1 es menor que 2.

Se tiene que los puntos x cuya distancia a -1 es menor que 2 verifican: $d(x, -1) < 2 \Rightarrow |x-(-1)| = |x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow x \in (-3, 1)$

3. a) Redondea a centenas los datos: 1 897,67, 987 514 y 123.
b) Redondea a milésimas: 34,2345, 0,8765, 0,12345.
c) Calcula los errores absolutos y relativos cometidos en a).

a) Los redondeos a centenas serán:
$1897{,}67 \approx 1900$; $987514 \approx 987500$; $123 \approx 100$

b) Ídem a milésimas:
$34{,}2345 \approx 34{,}235$; $0{,}8765 \approx 0{,}877$; $0{,}12345 \approx 10{,}123$

c) Los errores absolutos (e) y relativos (E) cometidos en las aproximaciones del apartado (a) serán:
$e(1900) = 1900 - 1897{,}67 = 2{,}33$ y

$$E(1\,900) = \frac{2{,}33}{1\,897{,}63} = \frac{233}{189\,763} = 0{,}0012$$

$$e(987500) = 987\,514 - 987\,500 = 14 \text{ y } E(987\,500) = \frac{14}{987\,514} = 0{,}00001$$

$$e(100) = 123 - 100 = 23 \text{ y } E(100) = \frac{23}{123} = 0{,}187$$

4. Expresa en notación científica los números indicando su orden de magnigud:

a) $1\,234 \cdot 10^5$; b) $0{,}0000000067012$;
c) $0{,}00763 \cdot 10^6$; d) $-527{,}05 \cdot 10^{-3}$

a) $1{,}234 \cdot 10^8$ Orden de magnitud 8
b) $6{,}7012 \cdot 10^{-9}$ Orden de magnitud −9
c) $7{,}63 \cdot 10^3$ Orden de magnitud 3
d) $-5{,}2705 \cdot 10^{-1}$ Orden de magnitud −1

5. i) Extrae factores:

a) $\sqrt{8a^5}$; b) $\sqrt[3]{81 \cdot 10^4 \cdot x^6}$; c) $\sqrt{\frac{16a}{27}}$

ii) Introduce factores:

a) $2a^2\sqrt{\frac{a}{2}}$; b) $\frac{2}{x^3}\sqrt[3]{x^2}$; c) $(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

i) Extraemos los factores:

a) $\sqrt{8a^5} = \sqrt{2^2\, 2\, (a^2)^2\, a} = 2a^2\sqrt{2a}$

b) $\sqrt[3]{81 \cdot 10^4 x^6} = \sqrt[3]{3^3 3 \cdot 10^3 \cdot 10\, (x^2)^3} =$
$= 3 \cdot 10 \cdot x^2 \sqrt[3]{3 \cdot 10} = 30x^2 \cdot \sqrt[3]{30}$

c) $\sqrt{\frac{16a}{27}} = \sqrt{\frac{4^2 \cdot a}{3^2 \cdot 3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

ii) Introducimos factores:

a) $2a^2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{(2a^2)^2}\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2^2a^4\frac{a}{2}} = \sqrt{2a^5}$

b) $\frac{2}{x^3}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{(\frac{2}{x^3})^3}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{x^9} - x^2} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{x^7}}$

c) $(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} =$
$= \sqrt{(x+1)^2\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{(x+1)(x-1)} = \sqrt{x^2-1}$

6. Halla el valor simplificado de:

a) $(\sqrt[5]{2})^5$ b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

a) $(\sqrt[5]{\ })^5 = \sqrt[5]{2^5} = 2$

b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3\, a}} = \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}$

7. Extrae factores y suma:

a) $2\sqrt{3} + \frac{10}{3}\sqrt{27} - 2\sqrt{108}$

b) $y^2\sqrt[3]{x^3y}+2y\sqrt[3]{x^3y^4}+\sqrt[3]{x^6y}$

c) $\dfrac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{7\sqrt{2}}$

a) $2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}\sqrt{27}-2\sqrt{108}=2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}\sqrt{3^3}-2\sqrt{3^3 2^2}=$

$=2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}3\sqrt{3}-2\cdot3\cdot2\sqrt{3}=(2+10-12)\sqrt{3}=0\cdot\sqrt{3}=0$

b) $y^2\sqrt[3]{x^3y}+2y\sqrt[3]{x^3y^4}+\sqrt[3]{x^6y}=$

$=y^2x\sqrt[3]{y}+2yxy\sqrt[3]{y}+x^2\sqrt[3]{y}=$

$(xy^2+2xy^2+x^2)\sqrt[3]{y}=(3xy^2+x^2)\sqrt[3]{y}$

c) $\dfrac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{7\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{8\sqrt{6^2 2}-3\sqrt{12^2 2}-2\sqrt{13^2 2}}{7\sqrt{2}}=$

$\dfrac{8\cdot6\sqrt{2}-3\cdot12\sqrt{2}-2\cdot13\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}=$

$\dfrac{(48-36-26)\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}=\dfrac{14}{-7}=-2$

Problemas propuestos

Tipo I. Relación de orden y recta real. Operaciones

1. Calcula las potencias:

a) 3^{-3}, $(-3)^3$, $(-3)^{-3}$, -3^{-3}

b) $(1/3)^{-3}$, $(-1/3)^3$, $-(-1/3)^{-3}$

c) $3^{-1}-(1/3)^{-1}$

d) $\dfrac{5^{-1}-5^0}{-5^{-1}+5^0}$

e) $\left(\dfrac{1^{-1}-(-1)^{-1}}{-1^{-1}+1^0}\right)^{-1}$

a) $3^{-3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$; $(-3)^3=-27$; $(-3)^{-3}=\dfrac{1}{(-3)^3}=-\dfrac{1}{27}$;

$-3^{-3}=\dfrac{-1}{3^3}=-\dfrac{1}{27}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$; $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{-1}{3^3}=\dfrac{-1}{27}$; $-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=(-3)^3=27$

c) $3^{-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}-3=-\dfrac{8}{3}$

d) $\dfrac{5^{-1}-5^0}{-5^{-1}+5^0}=-\dfrac{5^{-1}-5^0}{5^{-1}-5^0}=-1$

e) $\left(\dfrac{1^{-1}-(-1)^{-1}}{-1^{-1}+1^0}\right)^{-1}=\left(\dfrac{-1+1}{1+1}\right)^1=\dfrac{0}{2}=0$

2. Simplifica y no dejes exponentes negativos:

a) $(8a^{-1}b^2)^{-2}$ **b)** $\dfrac{(a^{-1})^2(-b)^3}{(-ab)^{-2}}$

c) $\dfrac{(-a)^{-3}(2b)^{-1}}{4ab^{-3}}$

a) $(8a^{-1}b^2)^{-2}=8^{-2}a^2b^{-4}=\dfrac{a^2}{8^2b^4}$

b) $\dfrac{(a^{-1})^2(-b)}{(-ab)^{-2}}=-\dfrac{a^{-2}b^3}{\frac{1}{a^2b^2}}=\dfrac{-b^5}{1}=-b^5$

c) $\dfrac{(-a)^{-3}(2b)^{-1}}{4ab^{-3}}=\dfrac{-1/a^3\ 1/2b}{4a/b^3}=-\dfrac{b^3}{4a^4 2b}=-\dfrac{b^2}{8a^4}$

3. Simplifica y da el resultado en forma radical:

a) $5a^{1/3}\ 2a^{1/2}$ **b)** $(16a^{-2/3}b^{2/3})^{1/2}$

c) $\left(\dfrac{2x^{-1}\ y^{1/2}}{x^{-1/2}\ y^{2/3}}\right)^6$

a) $5a^{1/3}\ 2a^{1/2}=5\cdot2a^{1/3+1/2}=10a^{5/6}=10\sqrt[6]{a^5}$

b) $(16a^{-2/3}b^{2/3})^{1/2}=16a^{1/2}a^{-1/3}b^{1/3}=4\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}=4\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

c) $\left(\dfrac{2x^{-1}\ y^{1/2}}{x^{-1/2}\ y^{2/3}}\right)^6=\dfrac{2^6x^{-6}y^3}{x^{-3}y^4}=\dfrac{64}{x^3y}$

4. Asigna cada número al conjunto o conjuntos que pertenezca según se hace en la primera línea:

	N	Z	Q	I
-3		x	x	
1,18				
$\sqrt{5}$				
6/12				
$\sqrt{25}$				
π				

	N	Z	Q	I
-3		x	x	
1,18			x	
$\sqrt{5}$				x
6/12			x	
$\sqrt{25}$	x	x	x	
π				x

5. Escribe tres números entre:

a) $3,\overline{37}$ y 3,37602 **b)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{18}{11}$

c) $\sqrt{\dfrac{36}{7}}$ y $\sqrt[3]{11,4}$

a) $3,\overline{37}<3,374<3,375<3,376<3,37602$

b) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi=1,61803<1,60804<1,61<1,62<\dfrac{18}{11}=1,63$

c) $\sqrt{\dfrac{36}{7}}=2,2677<2,26>2,255<2,2507>\sqrt[3]{11,4}=2,2506$

6. Decide la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones mediante ejemplos:

a) La suma de número racional e irracional es irracional.
b) El producto de número racional e irracional es irracional.
c) El producto de dos números irracionales es irracional.

a) La suma de número racional e irracional es irracional: verdad, $2+\pi$.
b) El producto de número racional e irracional es irracional: verdad, $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.
c) El producto de dos números irracionales es irracional: falso, $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=3$.

7. Prueba que si que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad<bc$ (*), entonces:

- $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ ya que por (*): $a(b+d) = ab+ad < b(a+c) = ba+bc$
- y $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ pues por (*) de nuevo: $(a+c)d = ad+cd < (b+d)c = bc + dc$

8. Demuestra que para todo número $a > 0$ se cumple que $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$a+\frac{1}{a}\geqslant 2 \Leftrightarrow a^2+1\geqslant 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geqslant 0$

Como la última desigualdad es cierta, también lo será la primera.

Nota: Puede hacerse ver la necesidad de que *a* sea positivo; pues si fuese negativo, la primera equivalencia no sería correcta.

9. Halla qué números representan las abscisas *A*, *B*, *C* y *D* de la figura.

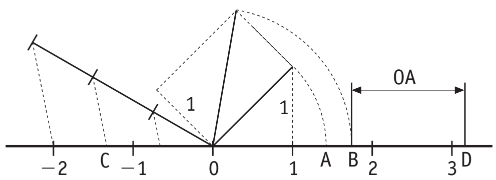


Fig. 2.4.

El intervalo [−2, 0] se divide en tres partes, luego el punto *C* corresponde a $-\frac{4}{3}$.

Por otro lado, de la construcción geométrica, aplicando el teorema de Pitágoras, *B* es $\sqrt{(\sqrt{2}^2)+1^2}=\sqrt{3}$ y *D* se obtiene sumando a *B* la distancia $OA=\sqrt{2}$, por tanto la abscisa que corresponde a *D* es $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

10. Comprueba que la longitud del segmento *AB* es Φ, siendo *M* el punto medio del lado del cuadrado.

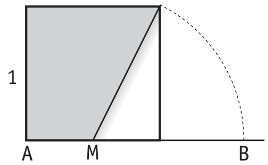


Fig. 2.5.

De nuevo utilizamos el teorema de Pitágoras: como MB $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, la distancia AB $=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que es el valor del número áureo.

11. Ordena los números $\frac{1}{a}$, a^2, $-b$, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{b}$, $\sqrt{b}$, b^2, $-a$,
a) Suponiendo que $1<a<b$.
b) Si $0<a<b<1$.

a) $-b<-a<1/b<1/a<\sqrt{a}<\sqrt{b}<b^2$.
a^2 no podemos situarlo.
b) $-b<-a<a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{b}<1/b<1/a$.
b^2 no podemos situarlo.

12. Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real, los conjuntos:
a) $A = \{x\in \mathbb{R} \mid x<-1\}$
b) $B = \{x\in \mathbb{R} \mid x<1/2 \text{ y } x\geqslant -0{,}5\}$
c) $C = \{x\in \mathbb{R} \mid x\leqslant 1 \text{ y } x>3\}$
d) $D = \{x\in \mathbb{R} \mid -2{,}5\leqslant x<1{,}2\}$

a) $(-\infty, -1)$
b) $[-1/2,$
c) ϕ,
d) $[-5/2, 6/5)$

13. Escribe la desigualdad que cumplen los números que pertenecen a los intervalos:
a) $(-\infty, 2]$ **b) $[2, 5]$**
c) $(-1, 3)\cup[0, \infty)$ **d) $[0, 3)\cap(-1, 1]$**

a) $\{x, x\leqslant 2\}$
b) $\{x, 2\leqslant x\leqslant 5\}$
c) $\{x, -1<x<\infty\}$
d) $\{x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$

14. Escribe en forma de desigualdad y de intervalo los números que verifican:
a) $|x|\leqslant 3$ **b) $|x|\geqslant 3$**
c) $\frac{5}{|x|}\geqslant 0$ **d) $|x-1|\leqslant 0$**

a) $\{x, -3\leqslant x\leqslant 3\}\Leftrightarrow[-3, 3]$
b) $\{x, x\leqslant -3 \text{ o } x\geqslant 3\}\Leftrightarrow(-\infty, -3]\cup[3, \infty)$
c) $\mathbf{R}-\{0$
d) Dado que la desigualdad incluye la igualdad: $\{1\} = [1, 1]$.

15. Encuentra los intervalos unión e intersección de:
a) $I = \{x\in \mathbb{R}, x+1<1\}$ y $J = [-1, 2)$.
b) $K = \{x\in \mathbb{R}, |x-1|\geqslant 2\}$ y $L = \{x, |x+2|\leqslant 2\}$.
c) $M = (-\infty, 2]$ y $N = \{x\in \mathbb{R}, |x-3|=2\}$.

a) $I \cup J = (-2, 0) \cup ([-1, 2) = (-2, 2)$ $\quad I \cap J = [-1, 0)$
b) $K \cup L = (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \cup [-4, 0]$
c) $M \cup N = (-\infty, 2] \cup \{5\} \cup \{1\} = (-\infty, 2] \cup \{5\}$; $M \cap N = \{1\}$

16. Halla y representa en la recta real los números que distan de −1 menos de 2 unidades

$d(x, -1) = |x-(-1)| = |x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow$
$-3 < x < 1 \Leftrightarrow (-3, 1)$

Tipo II. Notación científica. Números aproximados

17. i) Redondea a unidades:
a) 0,854 b) 115,06 c) −1 546,7
ii) Redondea a milésimas:
d) −0,0996 e) 56,4444 f) 1,897645

Al redondear a unidades, despreciamos la primera cifra decimal, por tanto:
a) $0{,}854 \approx 1$
b) $115{,}06 \approx 115$
c) $-1546{,}7 \approx -1547$

En el redondeo a milésimas, ésta es la última cifra conservada, luego:
d) $-0{,}0996 \approx -0{,}1$
e) $56{,}4444 \approx 56{,}444$
f) $1{,}897645 \approx 1{,}898$

18. Indica a qué intervalo pertenecen los números cuyo redondeo a centésimas es 1,23.

El intervalo sería: (1,225, 1,235) pues en él la distancia $d(x, 1{,}23) < 0{,}01$. También debería incluirse 1,225.

19. Si 1,23 es la medida de una magnitud en la que hemos cometido un error relativo máximo del 10% ¿entre qué valores está comprendido el valor exacto de la magnitud?

El error relativo es:
$E = \dfrac{|x-1{,}23|}{x} < 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}1 < \dfrac{x-1{,}23}{x} < 0{,}1$ y de la primera desigualdad:
$-\dfrac{x}{10} < x-1{,}23 \Leftrightarrow 1{,}23 < \dfrac{11x}{10} \Leftrightarrow x > \dfrac{12{,}3}{11} = \dfrac{123}{110}$
de la segunda desigualdad:
$E = \dfrac{x-1{,}23}{x} < 0{,}1 \Leftrightarrow -1{,}23 < \dfrac{x}{10} - x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1{,}23 > \dfrac{9x}{10} \Leftrightarrow x < \dfrac{12{,}3}{9} = \dfrac{123}{90}$
La magnitud está en el intervalo: (123/110, 123/90)

20. Calcula empleando la notación científica
a) $1{,}27653 \cdot (0{,}00006584)^3$
b) $\dfrac{37 \cdot 10^{-4}}{4125000}$

a) $1{,}27653 \cdot (0{,}00006584)^3$ que en la pantalla de la calculadora da: $3{,}643347-13 = 3{,}643347 \cdot 10^{-13}$

b) $\dfrac{37 \cdot 10^{-4}}{4125000} = 8{,}969697-10 = 8{,}969697 \cdot 10^{-10}$

21. La capacidad de memoria del disco duro de un ordenador se mide en gigabytes (Gb). Cada Gb tiene 10^9 bytes o unidades básicas de almacenamiento, de forma que cada byte contiene un símbolo (dígito, letra, etc.). Si por término medio una "palabra" está compuesta de 6 símbolos, estima cuántas palabras puede archivar un ordenador de 20 Gigabytes (Giga = 10^9).

$20\ \text{GB} = 20 \cdot 10^9$ Bytes Como cada "palabra" ocupa 6 bytes, se tiene que la memoria puede almacenar $\dfrac{20 \cdot 10^9}{6} = \dfrac{10^{10}}{3} = 3{,}\overline{3} \cdot 10^9$
Algo más de 3 millardos de palabras.

Tipo III. Simplificación y Operaciones con radicales.

22. Reduce a una sola potencia fraccionaria:
a) $\sqrt{a} \cdot a^{2/3}$ b) $(\sqrt{a})^{1/2}$
c) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{32}}$

a) $a^{1/2+1/3} = a^{7/6}$
b) $a^{1/2\ 1/2} = a^{1/4}$
c) $(a \cdot a^{1/2})^{1/2} = a^{1/2+1/4} = a^{3/4}$
d) $2 \cdot 2^{3/2} \cdot 2^{-5/2} = 2^0 = 1$

23. Utilizando la calculadora, halla el valor de los radicales:
a) $\sqrt[3]{5^6}$ b) $\sqrt[4]{5}$
c) $\sqrt[5]{0{,}05}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt{2{,}16}}$

a) $5^2 = 25$
b) 1,4953…
c) 0,54928…
d) 2,06613…

24. Halla, sin utilizar calculadora, el valor de:
a) $\sqrt{\dfrac{10}{0{,}1} 169}$ b) $\sqrt{144 \dfrac{0{,}09}{100}}$
c) $\sqrt{81 \cdot 144 \cdot 400}$ d) $\sqrt[3]{-8 \cdot 27 \cdot 64}$

a) $\sqrt{\dfrac{10}{0{,}1} 169} = \sqrt{10^2 \cdot 169} = \sqrt{10^2}\sqrt{169} = 10 \cdot 13 = 130$
b) $\sqrt{144 \dfrac{0{,}09}{100}} = \sqrt{144}\dfrac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{100}} = 12\dfrac{0{,}3}{10} = 0{,}36$
c) $\sqrt{81 \cdot 144 \cdot 400} = \sqrt{81}\sqrt{144}\sqrt{400} = 9 \cdot 12 \cdot 20 = 2160$
d) $\sqrt[3]{-8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{64} = -2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$

25. Reduce a índice común, divide y simplifica:
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt[4]{8}}$

c) $\sqrt[6]{2}\;\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{20^2}}{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{200}$

c) $\sqrt[6]{2}=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}=\sqrt[6]{2}=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^2\cdot 6^3}}{\sqrt[12]{3^{-18}}}=\sqrt[12]{2^5\cdot 3^{21}}$

26. Calcula y simplifica:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$

b) $\sqrt[3]{(-1)^3\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{-1}}+1}$

a) $\sqrt{\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^6a^2}}=\sqrt[24]{a^8}=\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[3]{(-1)^3\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{-1}}+1}=\sqrt[3]{\sqrt[15]{(-1)^{46}}+1}=\sqrt[45]{1}+1=1+1=2$

27. Reduce todo lo posible las sumas:

a) $(1-2\sqrt{2})^2-(1+2\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)+(2\sqrt{2})^2$

a) $(1-2\sqrt{2})^2-(1+2\sqrt{2})^2=1+8-4\sqrt{2}-1-8-4\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)+(2\sqrt{2})^2=5-4+8=9$

28. Demuestra que $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad y resulta:

$(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^2=2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=4\Rightarrow$

$\Rightarrow 8-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}=4\Rightarrow 8-2\sqrt{4^2-2^2\cdot 3}=4\Rightarrow$

$\Rightarrow 8-2\sqrt{4}=4\Rightarrow 8-4=4$

29. Demuestra que $(xy+z)^2\leqslant(x^2+z^2)(y^2+1)$**, y comprueba la desigualdad para** $x=2$ **e** $y=z=\sqrt{3}$

Para demostrar que $(xy+z)^2\leqslant(x^2+z^2)(y^2+1)$ vamos a desarrollar los dos términos de la desigualdad para ver que se cumple realmente:

$(xy+z)^2=x^2y^2+z^2+2xyz$

$(x^2+z^2)(y^2+1)=x^2y^2+z^2y^2+x^2+z^2$

Si se cumple la desigualdad debería ser:

$x^2y^2+z^2+2xyz\leqslant x^2y^2+z^2y^2+x^2+z^2\Leftrightarrow$

$2xyz\leqslant z^2y^2+x^2\Leftrightarrow 0\leqslant x^2-2xyz+z^2y^2$

Y podemos agrupar en el siguiente cuadrado: $(x-zy)^2\geqslant 0$ que se cumple siempre. Luego la desigualdad de partida es cierta.

Tipo IV. Suma de radicales semejantes

30. Reduce las sumas:

a) $-4\sqrt{\dfrac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\dfrac{7}{3}\sqrt{27}-\sqrt{\dfrac{48}{9}}$

b) $-2\sqrt{\dfrac{20}{27}}+\sqrt{\dfrac{125}{3}}-\dfrac{6}{5}\sqrt{\dfrac{45}{12}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}$

a) $-4\sqrt{\dfrac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\dfrac{7}{3}\sqrt{27}-\sqrt{\dfrac{48}{9}}=$

$2\cdot 5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}=5\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}=\dfrac{19}{3}\sqrt{3}$

b) $-2\sqrt{\dfrac{20}{27}}+\sqrt{\dfrac{125}{3}}-\dfrac{6}{5}\sqrt{\dfrac{45}{12}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}=$

$-2\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}}+5\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}=$

$=(-\dfrac{4}{3}+5-\dfrac{9}{5}-3)\sqrt{\dfrac{5}{3}}=-\dfrac{17}{15}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}=2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+5\cdot 2^2\sqrt[3]{2}=20\sqrt[3]{2}$

31. Suma, simplificando todo lo posible:

a) $2\sqrt{x^3y}-2\sqrt{xy^3}+3\sqrt{(xy)^3}-\sqrt{16xy}$

b) $\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3}$

a) $2\sqrt{x^3y}-2\sqrt{xy^3}+3\sqrt{(xy)^3}-\sqrt{16xy}=$

$=2x\sqrt{xy}-2y\sqrt{xy}+3xy\sqrt{xy}-4\sqrt{xy}=(2x-2y+3xy-4)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3}=$

$=\sqrt{a^2(a-b)}+\sqrt{(a-b)(a-b)^2}+\sqrt{b^2(a-b)}=$

$=(a+a-b+b)\sqrt{a-b}=2a\sqrt{a-b}$

Tipo V. Racionalización

32. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **e)** $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}\right)^2$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{16}}{4\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}-6}{6}$

e) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}\right)^2=\dfrac{x^4}{x^3}=x$

33. Racionaliza las fracciones:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **d)** $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{1-3}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{-2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 4}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

d) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\dfrac{(3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}=$

$=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+4\sqrt{3^2}+2\sqrt{3}\sqrt{6}}{2^2\sqrt{3^2}-\sqrt{6^2}}=$

$=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+12+2\sqrt{18}}{6}=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+12+6\sqrt{2}}{6}=$

$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

34. Calcula:

a) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{40}}$

b) $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{150}+4\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

a) Sumamos en el numerador y simplificamos:

$\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{40}}=\dfrac{2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-2\cdot 5\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}=$

$=\dfrac{-4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}\sqrt{5}}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

b) Operamos como en a):

$\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{150}+4\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 6}-\sqrt{5^2\cdot 6}+4\sqrt{3^2\cdot 6}}{\sqrt{6}}=$

$=\dfrac{(2-5+12)\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=9$

35. Suma y simplifica $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)}-\dfrac{5(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{2\cdot 3+2\sqrt{3}}{2^2\sqrt{3^2}-2^2}-\dfrac{5\sqrt{3}-15}{\sqrt{3^2}-3^2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=$

$=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{8}-\dfrac{5\sqrt{3}-15}{-6}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=$

$=\dfrac{18+6\sqrt{3}+20\sqrt{3}-60+16\sqrt{3}}{24}=\dfrac{-42+42\sqrt{3}}{24}=$

$=\dfrac{21\sqrt{3}-21}{12}=\dfrac{21}{12}(\sqrt{3}-1)$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. ¿En qué se diferencian los números racionales de los irracionales? Pon un ejemplo.

Los irracionales no se pueden expresar en forma de fracción.

2. Escribe sin las barras de valor absoluto la expresión:

a) $|x+1|$ **si** $x>-1$

b) $|x(x+x^3)|$

a) $|x+1|=x+1$ pues al ser $x>-1$, $x+1>0$

b) $|x(x+x^3)|=|x^2+x^4|=x^2+x^4$ pues ambas potencias son positivas siempre.

3. Simplifica la expresión $\dfrac{-[a-(c-a)]x-cx}{-a(-x)}$

$\dfrac{-[a-(c-a)]x-cx}{-a(-x)}=$

$\dfrac{(-a+c-a)x-cx}{ax}=\dfrac{(c-2a-c)x}{ax}=\dfrac{-2ax}{ax}=-2$

4. Redondea a milésimas:

a) −3,9525

b) 0,1672

c) 0,9999

a) $-3{,}9525\approx-3{,}953$

b) $0{,}1672\approx 0{,}167$

c) $0{,}9999\approx 1$

5. Escribe en notación decimal:

−3,21 7

0,05 −4

$-3{,}21\cdot 10^7=-32100000$

$0{,}05\cdot 10^{-4}=0{,}000005$

6. Calcula el valor

a) $\sqrt[4]{2^8}$

b) $\sqrt{6^2+8^2}$

a) $\sqrt[4]{2^8}=2^2=4$

b) $\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

7. Suma $\sqrt{80}+\frac{2}{3}\sqrt{45}$

$$\sqrt{80}+\frac{2}{3}\sqrt{45}=\sqrt{4^2 5}+\frac{2}{3}\sqrt{3^2 5}=4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$$

8. Reduce a un solo radical: $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}=\frac{\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt[4]{x^2}}=\sqrt[4]{\frac{x^6}{x^2}}=\sqrt[4]{x^4}=x$$

9. Escribe con una sola raíz y simplifica: $\sqrt{a-\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt{a-\sqrt[3]{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^3 a}}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$$

10. Racionaliza: $\frac{-2}{2-\sqrt{5}}$

$$\frac{-2}{2-\sqrt{5}}=\frac{-2(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=\frac{-2(2+\sqrt{5})}{4-5}=2(2+\sqrt{5})$$

Actividades

1. Halla:

a) $(2x-4)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+4\right)$ **b)** $(x+3)^2-(x-3)^2$

c) $(x-1)\cdot(x^2+2)^2-(1+2x)^2$

a) $\frac{1}{2}x^3-x^3+10x-x^2+2x-20=\frac{1}{2}x^3-2x^2+12x-20$
b) $x^2+6x+9-(x^2-6x+9)=12x$
c) $(x-1)\cdot(x^4+4x^2+4)-(1+4x+4x^2)=x^5-x^4+4x^3-8x^2-5$

2. Descompón en factores los siguientes polinomios:
a) $P(x)=x^2+4x-21$
b) $P(x)=x^3-2x^2-3x$
c) $P(x)=6x^4-7x^3+x$

a) $x^2+4x-21=0 \Rightarrow x=3,\ x=-7 \Rightarrow P(x)=(x-3)(x+7)$
b) $P(x)=x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x+1)(x-3)$
c) $P(x)=6x^4-7x^3+x=x(6x^3-7x^2+1)$.
Una solución de $6x^3-7x^2+1=0$ es $x=1$.

$(6x^3-7x^2+1)/(x-1) \rightarrow$

	6	−7	0	1
1		6	−1	−1
	6	−1	−1	0

Se tiene: $P(x)=x(x-1)(6x^2-x-1)=6x(x-1)(x-1/2)(x+1/3)$
Las raíces de $6x^2-x-1=m=$ son $x=1/2$ y $x=-1/3$.

3. Halla las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas:

a) $\frac{1-x}{x+2}-\frac{2x-1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-4}$ **b)** $x-2-\frac{x-1}{x^2+1}$

c) $\frac{2x^2-4}{x+1}-\frac{2x}{x+3}$

a) $\frac{(1-x)(x-2)-(2x-1)(x+2)+2x}{x^2-4}=\frac{-3x^2+2x}{x^2-4}$
b) $\frac{(x-2)(x^2+1)-(x-1)}{x^2+1}=\frac{x^3-2x^2-1}{x^2+1}$
c) $\frac{(2x^2-4)(x+3)-2x(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2x^3+4x^2-6x-12}{x^2+4x+3}$

4. Halla las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-1}{x-3}\cdot\frac{x+3}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-2}{5x}$

c) $\frac{2x-1}{\frac{x^2-3}{2x+1}}$ **d)** $\frac{x^2+3}{2}:\frac{x+3}{6}$

a) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{5x-15}$ b) $\frac{6x-4}{15x}$
c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2-3}=\frac{4x^2-1}{x^2-3}$ d) $\frac{6(x^2+3)}{2(x+3)}=\frac{3(x^2+3)}{x+3}$

5. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4-4x^2+4x^4}{1-x}$ **b)** $\frac{2x^3-6x+4}{2x+4}$

c) $\frac{2x(x-3)^2-2x^2(x-3)}{(x-3)^4}$

a) Es irreducible.
b) $\frac{2(x^3-3x+2)}{2(x+2)}=\frac{2(x+2)(x^2-2x+1)}{2(x+2)}=(x-1)^2$
c) $\frac{2x(x-3)^2-2x^2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{2x(x-3)-2x^2}{(x-3)^3}=\frac{2x^2-6x-2x^2}{(x-3)^3}=\frac{-6x}{(x-3)^3}$

6. Expresa como una sola raíz:

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ **c)** $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ **d)** $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ b) $\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

c) $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$

d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}$

Problemas propuestos

Tipo I. Operaciones con polinomios

1. Calcula:
a) $(31x-6x^2+5x^3)-(12x^3-6x^2+x)$
b) $(8x^4-9x^3+1)-(2x+3x^3-5x^4)$
c) $\left(2x^3-\frac{1}{2}x^2+3\right)-\left(\frac{3}{4}x^2+5x-\frac{1}{3}\right)$

a) $-7x^3+30x$
b) $13x^4-12x^3-2x+1$
c) $2x^3-\frac{5}{4}x^2-5x+\frac{10}{3}$

2. Calcula:
a) $(4x+5)-(2+x)^2+(2x)^2$
b) $(2-3x)^2-5[(3x-1)\cdot(3x+1)-2x]$
c) $3x^6\cdot 4x^5-(-2x^5)\cdot(-14x^3)+(2x^5)\cdot(-3x^4)-x^6\cdot(-4x^2)$

a) $(4x+5)-(2+x)^2+(2x)^2=4x+5-(4+4x+x^2)+4x^2=1+3x^2$
b) $(2-3x)^2-5[(3x-1)\cdot(3x+1)-2x]=$
$(4-12x+9x^2)-5(9x^2-1-2x)=-36x^2-2x+9$
c) $12x^{11}-28x^8-6x^9+4x^8=12x^{11}-6x^9-24x^8$

Nota: Los errores al efectuar las dos primeras operaciones son muy frecuentes, sobre todo cuando éstas se hacen fuera del contexto teórico. Un error puede ser: $(2+x)^2=2^2+x^2=4+x^2$; otro: $(2x)^2=2x^2$.

3. Halla:
a) $(x-6)^2$ **b)** $(4+x^2)^2$
c) $(3x+1)^2$ **d)** $(2x-1)^2$
e) $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$ **f)** $(4x-1)(4x+1)$

a) $x^2 - 12x + 36$ b) $16 + 8x^2 + x^4$ c) $9x^2 + 6x + 1$

d) $4x^2 - 4x + 1$ e) $\frac{1}{4}x^2 - 25$ f) $16x^2 - 1$

4. Haz las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(5x^2+3x-5)(7x^3-6x+3)$

b) $\left(x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\right)(x^2-5x-14)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)$

a) $35x^5 + 21x^4 - 65x^3 - 3x^2 + 39x - 15$

b) $x^4-\frac{21}{4}x^3-\frac{105}{8}x^2+\frac{43}{8}x+\frac{21}{4}$

c) $\frac{2}{3}x^3\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{4}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)+$

$+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)=-x^5+\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{15}x^3+\frac{3}{8}x^4-$

$-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}=$

$=-x^5+\frac{25}{24}x^4-\frac{47}{60}x^3-\frac{11}{20}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}$

5. Divide:

a) $(5x^4 - 14 + 5x + x^3) : (3 - x^2)$

b) $(20x^3+12x^4+29-39x^2-28x):(4x^2-5)$

c) $(2x^3-3x+2):(2x-1)$

a) Se ordenan los términos del dividendo y los del divisor en orden decreciente de sus grados. Dejamos en blanco el espacio correspondiente a $0 \cdot x^3$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +x^3 & & +5x & -14 & -x^2+3 \\
\cline{6-6}
-5x^4 & & +15x^2 & & & -5x^2-x-15 \\
\cline{1-3}
& +x^3 & +15x^2 & +5x & & \\
& -x^3 & & +3x & & \\
\cline{2-4}
& & +15x^2 & +8x & -14 & \\
& & -15x^2 & & +45 & \\
\cline{3-5}
& & & 8x & +31 &
\end{array}$$

Cociente: $-5x^2 - x - 15$

Resto: $8x + 31$

Por tanto: $5x^4 + x^3 + 5x - 14 = (-x^2 + 3) \cdot$
$\cdot (-5x^2 - x - 15) + (8x + 31)$

b) Cociente: $3x^2 + 5x - 6$

Resto: $-3x - 1$

c) Cociente: $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

Resto: $\frac{3}{4}$

Tipo II. Regla de Ruffini. Teorema del resto y factorización

6. Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones:

a) $(x^7 - x)$ **entre** $(x + 2)$ **b)** $(x^5+x-2x^3):(x-1)$

c) $(2x^3-x^5-3x):(x-3)$ **d)** $(3x^4-6):(x+1)$

a) Recuerda que cuando falta un término se pone un cero. Esto es:
$x^7 - x = x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0$
El divisor $x + 2 = x - (-2)$, o sea, $a = -2$. Con esto se forma el esquema:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & -126 \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 63 & -126
\end{array}$$

Los coeficientes del cociente, que será un polinomio de grado sexto, en orden decreciente, valen 1, −2, 4, −8, 16, −32 y 63. El resto es −126.
Luego:
$C(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$
$R(x) = -126$

b) Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x$
Resto: 0

c) Cociente: $-x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 21x - 66$
Resto: -198

d) Cociente: $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
Resto: -3

7. Descompón en factores el polinomio $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Si $x = 1$ es una raíz $\Rightarrow$ $(x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Se divide por Ruffini y se obtiene:
$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=(x-1)(2x^2-8x+6)=$
$2(x-1)(x^2-4x+3)$.
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x=1$ y $x=3$ $\Rightarrow$ $(x-1)$ y $(x-3)$ son los factores.
Por tanto,
$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=$
$=2(x-1)^2(x-3)$.

8. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = -5$ y que $P(2) = -7$

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 sus raíces.
Si $x_1 = -5 \Rightarrow P(x) = (x + 5)(x - x_2)$
Si $P(2) = -7 \Rightarrow (2 + 5)(2 - x_2) = -7 \Rightarrow x_2 = 3$
Por tanto, $P(x) = (x + 5)(x - 3) = x^2 + 2x - 15$

9. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, 2, 3 y 4 **b)** 1, 2 y 3 doble.

c) 1 y 2, las dos dobles.

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$
b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^2$
c) $(x - 1)^2(x - 2)^2$

Nota: En los tres casos hay infinitas soluciones. Basta multiplicar por una constante.

10. Halla el polinomio de segundo grado sabiendo que tiene por raíces $x = 1$ y $x = -6$ y que $P(0) = -12$

Sea $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 sus raíces.
Si $x_1 = 1$ y $x_2 = -6 \Rightarrow P(x) = a(x - 1)(x + 6)$
Por $P(0) = -12 \Rightarrow P(0) = a(-1) \cdot (6) = -12 \Rightarrow a = 2$.
Luego, $P(x) = 2(x - 1)(x + 6) = 2x^2 + 10x - 12$

11. Factoriza las siguientes expresiones polinómicas:
a) $3x^2 + 14x - 5$ **b)** $4x^5 + 2x^4 - 2x^3$
c) $x^3 + 5x^2 + 8x$

a) Resolviendo $3x^2 + 14x - 5 = 0$ se tiene: $x = 1/3$ y $x = -5$
Por tanto, $3x^2 + 14x - 5 = 3(x - 1/3)(x + 5)$
b) Sacando factor común $2x^3$, se obtiene:
$4x^5 + 2x^4 - 2x^3 = 2x^3(2x^2 + x - 1)$
Resolviendo $2x^2 + x - 1 = 0$, se tiene $x = 1/2$, $x = -1$
Por tanto, $2x^2 + x - 1 = 2(x - 1/2)(x + 1)$
Luego,
$4x^5 + 2x^4 - 2x^3 = 2x^3(2x^2 + x - 1) = 2x^3 \cdot 2(x - 1/2)(x + 1) = 4x^3(x - 1/2)(x + 1)$
c) Sacando factor común x, se obtiene:
$x^3 + 5x^2 + 8x = x(x^2 + 5x + 8)$
Resolviendo $x^2 + 5x + 8 = 0$, se tiene:
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-25 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{2}$$
Como esta ecuación no tiene solución, el polinomio $x^2 + 5x + 8$ no se puede descomponer en factores simples.
En consecuencia, $x^3 + 5x^2 + 8x = x(x^2 + 5x + 8)$

12. Factoriza los siguientes polinomios:
a) $P(x) = -5x^2 - x$
b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2$
c) $P(x) = 10x^3 - 250x$
d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2$

a) $P(x) = -5x^2 - x = -x(5x + 1)$
b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2 = 2x^2(2x^2 + 5)$
c) $P(x) = 10x^3 - 250x = 10x(x^2 - 25) = 10x(x + 5)(x - 5)$
d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2 = 8x^2(x^2 + 10x + 25) = 8x^2(x + 5)^2$

13. Halla el valor de b y factoriza $P(x) = x^3 + bx^2 - 12x$ sabiendo que $x = -2$ es una de sus raíces.

Como $P(-2) = 16 + 4b \Rightarrow b = -4$.
Por tanto, $P(x) = x^3 - 4x^2 - 12x = x(x + 2)(x - 6)$

Tipo III. Fracciones algebraicas

14. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
a) $\dfrac{21x^2}{7x - 14x^2}$ **b)** $\dfrac{4 - x}{3x - 12}$
c) $\dfrac{3x^2 - 4x}{x^3}$ **d)** $\dfrac{4x - 8}{2x}$
e) $\dfrac{3x^2 - 12}{x + 2}$ **f)** $\dfrac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$

a) $\dfrac{21x^2}{7x - 14x^2} = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot x^2}{7x(1 - 2x)} = \dfrac{3x}{1 - 2x}$
b) $\dfrac{4 - x}{3x - 12} = \dfrac{4 - x}{3(x - 4)} = \dfrac{-(x - 4)}{3(x - 4)} = -\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{3x^2 - 4x}{x^3} = \dfrac{x(3x^2 - 4)}{x^3} = \dfrac{3x^2 - 4}{x^2}$
d) $\dfrac{4x - 8}{2x} = \dfrac{4(x - 2)}{2x} = \dfrac{2(x - 2)}{x}$
e) $\dfrac{3x^2 - 12}{x + 2} = \dfrac{3(x^2 - 4)}{x + 2} = \dfrac{3(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = 3(x - 2)$
f) $\dfrac{(x - 1)^2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x - 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

15. Simplifica:
a) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$ **b)** $\dfrac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100}$
c) $\dfrac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2}$

a) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \dfrac{(x - 1)(x + 7)}{2(x - 1)} = \dfrac{x + 7}{2}$
b) $\dfrac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100} =$
$= \dfrac{4(x^2 - 10x + 25)}{4(x^2 - 50)} = \dfrac{4(x - 5)^2}{4(x + 5)(x - 5)} = \dfrac{x - 5}{x + 5}$
c) $\dfrac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2} =$
$= \dfrac{3x^2(x - 2)}{3x^2(x^2 + 8x - 20)} = \dfrac{3x^2(x - 2)}{3x^2(x - 2)(x + 10)} = \dfrac{1}{x + 10}$

16. Halla, simplificando el resultado:
a) $x - 1 + \dfrac{2}{x + 1}$ **b)** $2x - \dfrac{x - 1}{x^2}$
c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{8}{x^4}$ **d)** $\dfrac{3x - 2}{x} - \dfrac{3x - 3}{x + 2}$
e) $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2 + x} + \dfrac{3}{x + 1}$ **f)** $\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2 + 1$
g) $\dfrac{x + 1}{x + 5} + \dfrac{8x}{x^2 - 25}$ **h)** $\dfrac{x}{3x + 9} + \dfrac{x - 2}{3x - 9} - \dfrac{2x^2}{3x^2 - 27}$

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ b) $\dfrac{2x^3 - x + 1}{x^2}$
c) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4}$ d) $\dfrac{7x - 4}{x(x + 2)}$
e) $\dfrac{5}{x^2}$ f) $\dfrac{2x^2 + 2}{(x + 1)^2}$
g) $\dfrac{x - 1}{x - 5}$ h) $\dfrac{-2}{3(x - 3)}$

17. Calcula el resultado, factorizando si conviene:
a) $\dfrac{2x - 1}{3x - 3} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3x^2 - 6x + 3}$
b) $\dfrac{3x^2 - 12x + 12}{x^2 - 5x + 6} : \dfrac{6x^3 - 54x}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

a) Factorizamos los denominadores:
$3x - 3 = 3(x - 1)$; $3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$
Por tanto, el m.c.m. de los denominadores es $3(x - 1)^2$
Así:
$\dfrac{2x - 1}{3x - 3} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3x^2 - 6x + 3} = \dfrac{2x - 1}{3(x - 1)} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3(x - 1)^2} =$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-(2x^2-6x+4)}{3(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-3x+1-2x^2+6x-4}{3(x-1)^2}=\frac{3x-3}{3(x-1)^2}=$$

$$=\frac{3(x-1)}{3(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$$

b) $\frac{3x^2-12x+12}{x^2-5x+6}:\frac{6x^3-54x}{x^3-6x^2+9x}=$

$$=\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}:\frac{6x(x+3)(x-3)}{x(x-3)^2}=$$

$$=\frac{3(x-2)^2\cdot x(x-3)^2}{(x-2)(x-3)\cdot 6x(x+3)(x-3)}=\frac{3(x-2)}{6(x+3)}=\frac{x-2}{2(x+3)}$$

18. Halla, simplificando el resultado:

a) $(2x-1):\frac{3x}{x+1}$ **b)** $\frac{\frac{x+3}{3x-2}}{x+1}$

c) $\frac{x^2-1}{x}:\frac{x+1}{x+2}$ **d)** $\frac{x+3}{x-2}\cdot\frac{x^2-4x+4}{x^2-9}$

e) $\frac{3x^4-15x^3+18x^2}{x^2-8x+15}:\frac{x^2+15x}{x^2-25}$

f) $\frac{5x^2-4}{x^2-4}+\frac{x-2}{5x+15}\cdot\frac{5x^2+20x+15}{x+2}$

a) $\frac{2x^2+x-1}{3x}$ b) $\frac{x^2+4x+3}{3x-2}$

c) $\frac{x^2+x-2}{x}$ d) $\frac{x-2}{x-3}$

e) x^2-2x f) $\frac{x^2}{x-2}$

19. Transforma, sin hacer la división, la expresión $\frac{D(x)}{d(x)}$ en su equivalente de la forma $C(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$, en los casos:

a) $\frac{2x^2-3x+5}{x}$ **b)** $\frac{x^2+3x-5}{x^2}$

c) $\frac{x^2-3x+5}{x-3}$ **d)** $\frac{x^2}{x-1}$

a) $\frac{2x^2-3x+5}{x}=2x-3+\frac{5}{x}$

b) $\frac{x^2+3x-5}{x^2}=1+\frac{3x-5}{x^2}$

c) $\frac{x^2-3x+5}{x-3}=\frac{x(x-3)+5}{x-3}=x+\frac{5}{x-3}$

d) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$

20. Descompón en fracciones simples:

a) $\frac{1}{x^2-4}$ **b)** $\frac{2x-1}{x^2+3x-4}$

c) $\frac{3x+2}{x^2+3x}$

a) $\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}=\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

Luego:
$1=A(x+2)+B(x-2)$
si $x=2$: $1=4A \Rightarrow A=1/4$
si $x=-2$: $1=-4B \Rightarrow B=-1/4$
Con esto: $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1/4}{x-2}-\frac{1/4}{x+2}$

b) $\frac{2x-1}{x^2+3x-4}=\frac{1/5}{x-1}+\frac{9/5}{x+4}$

c) $\frac{3x+2}{x^2+3x}=\frac{2/3}{x}+\frac{7/3}{x+3}$

Tipo IV. Operaciones con otras expresiones algebraicas

21. Sea $P(x)=x^2-1$ y $Q(x)=-x^2-x+2$, halla:

a) $P(x)-2Q(x)$ **b)** $\frac{P(x)}{Q(x)}$

c) $\frac{Q(x)-2}{P(x)}$

a) $3x^2+2x-5$ b) $-\frac{x+1}{x+2}$

c) $\frac{x}{1-x}$

22. Para los mismos $P(x)$ y $Q(x)$ halla:
a) $(P(x)+P(x))^2$
b) $(P(x))^2+x^2\cdot Q(x)$
c) $(P(x)-Q(x))(P(x)+Q(x))$

a) $(x+1)^2$
b) $1-x^3$
c) $-2x^3+x^2+4x-3$

23. Halla:
a) $(2x-\sqrt{x})^2$ **b)** $2(4x-3\sqrt{x})-(\sqrt{x}-3)^2$
c) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

a) $4x^2-4x\sqrt{x}+x$ b) $7x-9$

c) $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2}$

24. Dadas las expresiones $E(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ y $F(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ halla:

a) $E(1)$, $F(1)$, $E(4)$ y $F(4)$
b) $E(x)\cdot F(x)$

a) $E(1)=0$, $F(1)$ no definido, $E(4)=2/5$; $F(4)=2$

b) $E(x)\cdot F(x)=\frac{x}{x+1}$

25. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ **c)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

a) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$ b) $\dfrac{-x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$

c) $x+\sqrt{x(x-1)}$

Tipo V. Aplicaciones

26. Expresa algebraicamente:
a) Cuatro veces x menos su décima parte.
b) El producto de dos números consecutivos vale 462.
c) El precio de una entrada de cine es x más el 6 por 100 de IVA aplicado sobre x.
d) El cuadrado de la diferencia entre x e y, más el doble del cuadrado de x.

a) $4x-\dfrac{x}{10}$ b) $x\cdot(x+1)=462$

c) $P=x+\dfrac{6}{100}x$ d) $(x-y)^2+2x^2$

27. La altura de un cohete viene dada por la expresión $h(t)=50t-5t^2$, donde t viene dado en segundos y $h(t)$ en metros.
a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 2 y 5 segundos?
b) ¿Y al cabo de 10 segundos? ¿Cómo interpretas este último resultado?

a) $h(1)=50-5=45$ m; $h(2)=100-20=80$ m;
$h(5)=250-125=125$ m.
b) $h(10)=0$. El cohete ha caído.

28. El coste total, en euros, de la producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la expresión $C(x)=100\sqrt{x}+1000)^2$. Halla:
a) El coste de producir 16, 100, y 400 unidades. ¿A cuánto sale la unidad en cada caso?
b) Determina la expresión que da el coste por unidad cuando se fabrican x unidades.

a) $C(16)=100\sqrt{16}+1000=1400$ €. Cada unidad sale a $1\,400/16=87{,}5$ €
$C(100)=100\sqrt{100}+1000=2000$ €. Cada unidad sale a $2\,000/100=20$ €
$C(400)=100\sqrt{400}+1000=3000$ €. Cada unidad sale a $3\,000/400=7{,}5$ €
b) El coste unitario es igual al coste total entre el número x de unidades fabricadas. Esto es:

$$c(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{100\sqrt{x}+1000}{x}$$

29. Halla la expresión que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base x. Calcula el valor de esa área cuando $x=3$.

Sea el triángulo de la figura, donde cada uno de los lados iguales vale y.

Como su perímetro vale 8 $\Rightarrow$ $2y+x=8 \Rightarrow y=\dfrac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2=h^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h=\sqrt{y^2-\dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y=\dfrac{8-x}{2} \Rightarrow$

$h=\sqrt{\dfrac{64-16x+x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\sqrt{16-4x}$

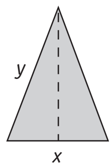


Fig. 3.1.

El área del triángulo es $A=\dfrac{x\cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor,

$A(x)=\dfrac{x\sqrt{16-4x}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3}$

Para $x=3$, el área vale $A(3)=\sqrt{4\cdot 9-27}=3$ cm².

30. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo enlosado de 1,5 m de ancho. Si la piscina es 10 m más larga que ancha, halla:
a) La expresión que da el área del rectángulo que delimita la piscina.
b) La expresión que da el área del pasillo enlosado.

La situación es como la que se muestra en la figura.

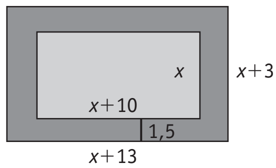


Fig. 3.2.

a) $A(x)=(x+13)(x+3)=x^2+16x+39$
b) El área del pasillo es la diferencia entre el rectángulo de fuera menos el rectángulo de la piscina.
$P(x)=(x+13)(x+3)-(x+10)x=$
$=x^2+16x+39-x^2-10x=6x+39$

31. Expresa (en función del primero de ellos) el producto de tres números positivos cuya suma es 60 y tal que el segundo sea doble del primero.

Sean x, y, z los números.
Se sabe que $y=2x$; y que $x+y+z=60 \Rightarrow 3x+z=60 \Rightarrow$
$z=60-3x$
El producto de los tres números es:
$P=xyz=x\cdot 2x\cdot(60-3x)=-6x^3+120x^2$

32. En la pared lateral de una buhardilla se quiere poner un panel rectangular como el que se muestra en la Fig. 3.3. Determina la superficie de dicho panel en función del lado x de la base.

La superficie del panel es $S=x(y+1)$. Ver figura.

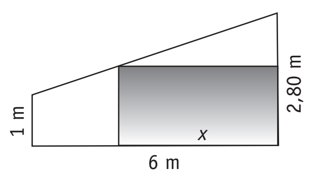


Fig. 3.3.

Por Tales: $\dfrac{6-x}{y}=\dfrac{6}{1{,}80} \Rightarrow y=\dfrac{1{,}80(6-x)}{6}$

Por tanto: $S(x)=x\cdot\left(1+\dfrac{1{,}80(6-x)}{6}\right)=2{,}8x-0{,}3x^2$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Expresa algebraicamente:
a) La mitad de x más el cuadrado de y.
b) La velocidad es el espacio partido por el tiempo.
c) La mitad de la suma de B y b, por h. (Área de un trapecio.)

a) $\dfrac{x}{2}+y^2$;

b) $v=\dfrac{e}{t}$;

c) $\dfrac{B+b}{2}\cdot h$

2. Halla: $(2x-3)^2-(2x+4)\cdot(2x-4)$

$-12x+18$

3. Simplifica $\dfrac{2x^2+6x}{2x}$

$x+3$

4. Halla $\left(\dfrac{2}{3}x+1\right)\cdot\left(-2x+\dfrac{1}{2}\right)$

$-\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{2}$

5. Halla el resto y el cociente de la división $(x^3-2x+1):(x-3)$

$C(x)=x^2+3x+7$; $r=22$.

6. Calcula el valor numérico de $P(x)=2x^3-9x+2$ para $x=-1$ y $x=2$. ¿Puedes dar un factor de $P(x)$ de la forma $x-a$?

$P(-1)=9$; $P(2)=2$. No, no tiene raíces enteras.

7. Sin resolver la ecuación de segundo grado asociada al polinomio $Q(x)=x^2+7x$, halla sus raíces.

0 y -7

8. La expresión $C(x)=\dfrac{10x+100\sqrt{x}+1000}{x}$ da el coste (en euros) por unidad fabricada de un determinado producto, cuando se fabrican x unidades de él. ¿A cuánto sale la unidad cuando se fabrican 10 000 unidades?

11,1 €

9. Halla la expresión que da la superficie de un triángulo equilátero en función del lado x.

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

10. Halla un polinomio de segundo grado que tenga por raíces $x=-1$ y $x=-2$.

x^2+3x+2

Actividades

1. De la ecuación $x^2+bx+c=0$ se sabe que la suma de sus raíces es 2 y su producto −3. Encuentra dichas raíces y los coeficientes b y c.

Planteamos las ecuaciones: $\begin{cases} -\dfrac{b}{1}=2 \\ \dfrac{c}{1}=-3 \end{cases} \Rightarrow b=-2,\ c=-3.$

Así que la ecuación propuesta es $x^2-2x-3=0$, cuyas soluciones son 3 y −1.

2. Resuelve la ecuación $\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}=2$

$\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}=2 \Rightarrow$
$\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{x^2-3}+2 \Rightarrow 2x^2+1=x^2-3+4\sqrt{x^2-3}$
$\Rightarrow x^2=4\sqrt{x^2-3} \Rightarrow x^4=16(x^2-3) \Rightarrow x^4-16x^2+48=0$, ecuación bicuadrada que se resuelve haciendo
$x^2=t,\ t^2-16t+48=0 \Rightarrow t=4$ y $t=12 \Rightarrow$
$x=\pm2$ y $x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+1}=0$ **b)** $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}=3x$

c) $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x}$

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+1}=0$ se verifica si el numerador es cero:
$x^2-3x-4=0$, que resuelta da por soluciones $x=-1$ y $x=4$, ambas aceptables.

b) Quitamos denominadores en la ecuación, quedando:
$x(1-x)+x+1=3(x+1)(1-x) \Rightarrow$
$2x-x^2+1=-3x^2+3 \Rightarrow 2x^2+2x-2=0$, ecuación que nos aporta las soluciones $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

c) Operando: $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{3x+2}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x} \Rightarrow$
$-3x^2+2x=3x^2+4x+1 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-1/2.$

4. Discute, sin llegar a resolver, la compatibilidad de los sistemas:

a) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases}$

Transformamos cada uno de los sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ 2E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ 0=3 \end{cases}$

El sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x=3 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado.

c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+4E1 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=3 \\ 0=0 \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado.

5. Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$, calcula los valores que debe tomar b para que el sistema sea:
a) Compatible.
b) Incompatible.

a) Para que el sistema sea compatible determinado los coeficientes de las incógnitas no han de ser proporcionales, luego: $\dfrac{4}{-2}\neq\dfrac{b}{1} \Rightarrow b\neq-2.$

b) El sistema será compatible indeterminado si $\dfrac{4}{-2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{5}{4}$, lo que nunca podrá cumplirse.

6. Halla la solución de $\begin{cases} y^2+x^2=160 \\ x-y=8 \end{cases}$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera: $y^2+(y+8)^2=160 \Rightarrow 2y^2+16y-96=0 \Rightarrow y=-12$ e $y=4$, que dan para x los valores $x=-4$ y 12 respectivamente.

Problemas propuestos

Tipo I. Ecuación de primer grado y problemas relacionados

1. Expresa mediante una ecuación las siguientes relaciones:
a) La suma de un número par, su anterior y su posterior vale 60
b) La suma de tres números impares consecutivos vale 213.
c) El cuadrado de la suma de dos números es igual al doble de su suma.

a) $2n+2n-2+2n+2=60 \Leftrightarrow 6n=60$
b) $2n-1+2n+1+2n+3=213 \Leftrightarrow 6n+3=213$
c) $(a+b)^2=2(a+b)$

2. Escribe una ecuación lineal que no tenga solución. Y otra que posea infinitas.

Sin solución: $x+3x-1=4x+2$
Indeterminada: $-2x+5+x=6-x-1$ (es una identidad)

3. Resuelve las ecuaciones :

a) $\dfrac{2}{x+1}=-\dfrac{1}{x+4}$

b) $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{2(x+2)}{3}=\dfrac{3x+1}{6}$

a) $\dfrac{2}{x+1}=-\dfrac{1}{x+4} \Rightarrow 2(x+4)=-x-1 \Rightarrow x=-3$

b) $\frac{x-1}{4}-\frac{2(x+2)}{3}=\frac{3x+1}{6}$ quitamos denominadores como en a) quedando: $3x-3-8x-16=6x+12 \Rightarrow x=-21/11$

4. Halla la solución:

a) $|x+3|=\frac{x}{3}+3$ **b)** $|x|=\frac{1-x}{2}$

c) $\left|\frac{x+2}{5}\right|=x-2$

a) Como $|x+3|=|-x-3|$ la igualdad es cierta si:

$x+3=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=0$ o

$-x-3=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2}$

b) Análogamente al caso anterior, de $|x|=\frac{1-x}{2}$ deducimos dos ecuaciones :

$x=\frac{1-x}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$-x=\frac{1-x}{2} \Rightarrow x=-1$

c) Para este caso:

$\frac{x+2}{5}=x-2 \Rightarrow x=3$

$-\frac{x+2}{5}=x-2 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

5. Tres operarios trabajan en total 96 horas semanales en una cadena de producción. Si el tiempo dedicado por uno de ellos a este fin son los 3/5 del tiempo empleado por otro y éste los 5/8 del dedicado por el tercero, ¿cuántas horas semanales permanece cada trabajador en la cadena?

Llamemos x las horas semanales de trabajo del tercer operario, entonces el segundo dedica $\frac{5}{8}x$ y el primero $\frac{3}{5}\frac{5}{8}x=\frac{3}{8}x$; así que, $\frac{3}{8}x+\frac{5}{8}x+x=96 \Rightarrow 2x=96 \Rightarrow x=48$ horas. El segundo operario trabaja 30 h y el primero 18 h.

6. Halla tres múltiplos consecutivos de 3, cuya suma sea 54.

Si el primer múltiplo de 3 es $3x$, el siguiente será $3x+3$ y el siguiente $3x+6$.
Imponiendo la condición de la suma:
$3x+3x+3+3x+6=54 \quad 9x=54-9=45 \quad x=5$. Luego los múltiplos consecutivos son: 15, 18 y 21.

7. Se mezclan 50 litros de aceite de girasol de 0,99 €/l con aceite de 0,78 €/l, obteniéndose una mezcla de 0,9 €/l. ¿Cuántos litros se han empleado del aceite más barato?

Llamemos x los litros empleados del aceite de 0,78 €. El valor monetario de los $50+x$ litros de mezcla es: $(50+x)\cdot 0{,}9$ €, que coincidirá con el valor, en euros, de los líquidos que la componen: $x\cdot 0{,}78+50\cdot 0{,}99$ es decir,
$(50+x)\cdot 0{,}9=x\cdot 0{,}78+50\cdot 0{,}99 \Rightarrow 750=20x \Rightarrow x=37{,}5$ litros

8. Un automóvil parte de Sevilla a una velocidad constante de 90 km/h. Veinte minutos después parte otro coche en su búsqueda, alcanzándole a las dos horas. ¿A qué velocidad circuló el segundo coche?

El primer coche que salió de Sevilla, ha circulado durante 2 horas y 20 min, o sea, $2+\frac{1}{3}$ h $=\frac{7}{3}$ h y ha recorrido $90\cdot\frac{7}{3}=$ 210 kilómetros.
El segundo coche ha recorrido esos mismos kilómetros en 2 horas, luego su velocidad ha sido: $\frac{210}{2}=105$ km/h.

Tipo II. La ecuación de segundo grado y problemas afines

9. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:
a) $3x^2+x=0$ **b)** $3(x+1)^2=27$
c) $4x^2-4x-35=0$ **d)** $-2(x-5)^2-8=0$
e) $(1-2x)^2+3x=2(x+2)^2+2$

a) Si sacamos factor común: $x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0$ o $3x+1=0$, que nos da los valores solución $x=0$ y $x=-\frac{1}{3}$.

b) Pongamos $(x+1)^2=\frac{27}{3}=9 \Rightarrow x+1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$ y nos resultan las soluciones, para $+3$: $x+1=3 \Rightarrow x=2$; y para -3: $x+1=-3 \Rightarrow x=-4$

c) Aplicamos la fórmula general:
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4\cdot 35}}{2\cdot 4}=\frac{4\pm 24}{8}$, es decir,
$x=7$ y $x=-5/2$.

d) Como en el caso b), si despejamos $(x-5)^2$ nos queda:
$(x-5)^2=\frac{8}{-2}=-4$ lo que es imposible pues el primer miembro siempre es positivo. Esta ecuación carece de solución real.

e) $(1-2x)^2+3x=2(x+2)^2+2 \Leftrightarrow 2x^2-9x-9=0 \Rightarrow$
$x=\frac{9\pm\sqrt{153}}{4}$

10. ¿Cuánto tiene que valer c en la ecuación $3x^2+5x+c=0$ para que posea dos, una o ninguna solución?

El discriminante de la ecuación es: $\Delta=25-12c \Rightarrow$

$$\begin{cases} c<\frac{25}{12} & \text{tiene 2 soluciones} \\ c=\frac{25}{12} & \text{solución doble} \\ c>\frac{25}{12} & \text{solución imaginaria} \end{cases}$$

11. En $x^2+bx-2=0$, ¿qué tipo de soluciones te vas a encontrar para cualquier valor de b?

El discriminante $\Delta=b^2+8>0 \Rightarrow$ 2 soluciones reales

12. ¿Qué valor o valores de c hacen que la ecuación $5x^2-2x+c=0$ tenga solución doble?

Para que tenga solución doble: $\Delta=4-20c=0 \Rightarrow c=1/5$

13. Dos operarios realizan una obra en 12 días, trabajando conjuntamente. Uno de ellos emplea 10 días más que el otro si trabaja sólo. ¿Cuantos días necesita cada obrero para completar la obra en solitario?

Trabajando solo un operario tarda x días y el más lento $x+10$. En un día, el primero hará $\frac{1}{x}$ de su trabajo y el segundo $\frac{1}{x+10}$; si trabajan conjuntamente hacen $\frac{1}{12}$ de obra por día, luego: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x+10+x}{x(x+10)}=\frac{1}{12} \Rightarrow 12(2x+10)=$
$\Rightarrow =x(x+10) \Rightarrow 24x+120=x^2+10 \Rightarrow x^2-14x-120=0$
ecuación que resuelta da por soluciones 20 y -6 días, siendo válida únicamente la positiva. Así, cada trabajador emplea 20 y 30 días en hacer la obra.

14. La suma de los cuadrados de la edad actual de un muchacho y de la que tendrá dentro de dos años es de 580. ¿Cuántos años tiene el chico?

Si tiene actualmente x años, dentro de dos tendrá $x+2$ años.
Las condiciones del problema imponen que $x^2+(x+2)^2=580$, que desarrollando, reduciendo términos semejantes y dividiendo por 2 nos da la ecuación:
$x^2+2x-288=0$, con soluciones $x=-18$ y $x=16$. La negativa no es válida.

15. Dos fuentes llenan un depósito en 6 h y una sola de ellas lo llenaría empleando 12 h más que la otra. ¿Cuánto tiempo tardará cada una en colmar el depósito?

Observación: Este problema es similar al resuelto n.º 2, pero dará lugar a una ecuación de segundo grado.
Sean x las horas que tarda en llenar el depósito la fuente con mayor caudal. En una hora, cada fuente rellena $1/x$ y $1/(x+12)$ del depósito, respectivamente, y las dos conjuntamente, 1/6 del mismo; por tanto:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{6}$$

Al quitar denominadores nos resulta:
$6(x+12)+6x=x(x+12) \Rightarrow 6x+72+6x=x^2+12x \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=72 \Rightarrow x=\pm\sqrt{72}=\pm 6\sqrt{2}$ cuya solución positiva es la única admisible, por lo que las fuentes tardarán en llenar el depósito $6\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}+12$ horas.

Tipo III. Ecuaciones reducibles a cuadráticas, racionales y polinómicas.

16. Resuelve las ecuaciones:
a) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}$
b) $x-\sqrt{x}=6$
c) $2x-\sqrt{x}=\frac{x}{\sqrt{x}}$
d) $\sqrt{21x-6}=3x$

a) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12} \Rightarrow x^2-4=12 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$
b) $x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow x-6=\sqrt{x} \Rightarrow (x-6)^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow$
$x^2-13x+36=0$ que la solución positiva, única válida es $x=9$
c) $2x-\sqrt{x}=\frac{x}{\sqrt{x}}$, vamos a quitar denominadores y pasamos al primer miembro todos los términos: $2x\sqrt{x}-x=x \Rightarrow$
$2x(\sqrt{x}-1)=0 \Rightarrow x=0$ o $\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$ es la solución válida.
d) Elevando al cuadrado se obtiene:
$21x-6=(3x)^2 \Rightarrow 21x-6=9x^2$
Simplificando: $3x^2-7x+2=0$.
Las soluciones son: $x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 3\cdot 2}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}$,
es decir: $x_1=2$ y $x_2=\frac{1}{3}$.
Ambas soluciones son válidas, según puedes comprobar

17. Halla la solución y comprueba los resultados:
a) $3x+\sqrt{3x-1}=1$
b) $2x-3\sqrt{x-3}=x+3$
c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{1-x}$

a) Dejamos la raíz en el primer miembro y elevamos al cuadrado:
$3x-1=(1-3x)^2$.
Desarrollando y agrupando:
$3x-1=1+9x^2-6x \Rightarrow 9x^2-9x+2=0$
que tiene por soluciones $x_1=\frac{2}{3}$ y $x_2=\frac{1}{3}$. Sólo es admisible 1/3 como solución.
b) En $2x-3\sqrt{x-3}=x+3$ aislamos la raíz en el segundo miembro: $x-3=3\sqrt{x-3} \Rightarrow (x-3)^2=9(x-3) \Rightarrow x^2-15x+36=0$ cuyas soluciones 3 y 12 son ambas válidas.
c) Elevamos los dos miembros al cuadrado:
$2x-1=3x-2+1-x+2\sqrt{(3x-2)(1-x)} \Rightarrow$
$0=2\sqrt{(3x-2)(1-x)} \Rightarrow 0=4(3x-2)(1-x)$ que nos proporciona $x=1$ y $x=2/3$ (ésta no es válida) como soluciones.

18. Calcula las soluciones de:
a) $x^4-9x^2=0$
b) $x^4-8x^2+16=0$
c) $2x^4+x^2-3=0$
d) $x^4-3x^2+2=0$

a) $x^4-9x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-9)=0 \Rightarrow x^2(x+3)(x-3)=0$ que da las soluciones $x=0$, $x=3$ y $x=-3$
b) $x^4-8x^2+16=0$ es una ecuación bicuadrada que haciendo $x^2=t$, nos queda: $t^2-8t+16=(t-4)^2=0$ dando por raíz $t=4$ y por tanto, $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
c) $2x^4+x^2-3=0$ también es bicuadrada por lo que con $x^2=t$ queda $2t^2+t-3=0$ que proporciona $t=1$ única solución positiva y $x=\pm 1$.
d) $x^2=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ y $x=\pm 1$

19. Halla las raíces de las ecuaciones:
a) $(x^2-1)(x^2+3x)=0$
b) $x^4+2x^3-x^2+4x-6=0$
c) $2x^4-3x^3+x=0$

a) Si descomponemos en factores los términos de la ecuación $(x^2-1)(x^2+3x)=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)x(x+3)=0 \Rightarrow x=1$, $x=-1$, $x=0$ y $x=-3$ son las soluciones.
b) Tanteamos las raíces de $x^4+2x^3-x^2+4x-6=0$ dividiendo por Ruffini, que nos da:

	1	2	−1	4	−6
1		1	3	2	6
	1	3	2	6	0
−3		−3	0	−6	
	1	0	2	0	

soluciones reales son $x=1$ y $x=-3$, quedando el polinomio $x^2+2=0$ que tiene raíces imaginarias.

c) En $2x^4-3x^3+x=0$ sacamos factor común x: $x(2x^3-3x+1)=0$; el polinomio del paréntesis nos da las raíces $x=1$ y $x=-1/2$, que junto a $x=0$ del factor común tenemos las raíces de la ecuación propuesta.

	2	−3	0	1
1		2	−1	−1
	2	−1	−1	0
1		2	1	
	2	1	0	
−1/2		−1		
	2	0		

20. Resuelve:

a) $\dfrac{1-4x}{2x^2-1}=0$ **b)** $\dfrac{5}{2x^2-1}=0$

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=0$ **d)** $\dfrac{-2}{3x-1}=\dfrac{4}{1-x}$

e) $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+2}$ **f)** $3x^2+1=\dfrac{8}{x^2+1}$

a) $\dfrac{1-4x}{2x^2-1}=0$, el numerador debe anularse $\Rightarrow 1-4x=0 \Rightarrow x=1/4$

b) $\dfrac{5}{2x^2-1}=0$, como $5\neq 0$ esta ecuación nunca puede anularse.

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=0$ equivale a que el numerador se anule: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=2$ y $x=1$

d) Para quitar denominadores, multiplicamos en cruz: $\dfrac{-2}{3x-1}=\dfrac{4}{1-x} \Rightarrow -2+2x=12x-4 \Rightarrow 10x=2 \Rightarrow x=1/5$

e) Multiplicamos en cruz: $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+2} \Rightarrow x^2-4=x^2+5x+4 \Rightarrow 5x=-8 \Rightarrow x=-8/5$

f) Quitamos el denominador: $(3x^2+1)(x^2+1)=8 \Rightarrow 3x^4+4x^2+1=8 \Rightarrow 3x^4+4x^2-7=0$; esta ecuación bicuadrada que con el cambio habitual $x^2=t$ nos da como soluciones válidas en $x=\pm 1$.

Tipo IV. Ecuaciones de dos incógnitas y sistemas lineales.

21. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-y+1 \\ \dfrac{x-y}{2}=1-x \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=2 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3(6x-1)=2 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -16x=2-3 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{16} \\ y=6\dfrac{1}{16}-1=-\dfrac{5}{8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-y+1 \\ \dfrac{x-y}{2}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-2y \\ x-y=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ 3x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2-3y \\ 3(2-3y)-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ 4-10y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

22. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x-\dfrac{y}{3}=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{3}=0 \\ \dfrac{x+y-2}{2}=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x-\dfrac{y}{3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$E2+E1 \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-2=7 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

b) Si en el sistema $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{3}=0 \\ \dfrac{x+y-2}{2}=1 \end{cases}$ quitamos denominadores

queda: $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$ y

$E1-3E2 \begin{cases} x=-1-10 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ -11+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=16 \end{cases}$

23. Halla el valor de los parámetros a y b en $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x-ay=-3 \\ -\dfrac{1}{3}x+ay=b \end{cases}$, para que $x=2$, $y=3$ sea solución del sistema.

Sustituyamos en el sistema las soluciones:

$\begin{cases} 5-3a=-3 \\ -\dfrac{2}{3}+3a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{3} \\ b=8-\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{8} \end{cases}$

24. Añade a la ecuación $6x-2y=-3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:
a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

a) Para que el sistema sea determinado añadimos una ecuación que tenga coeficientes no proporcionales a los de la dada, por ejemplo, $x + y = 0$
b) En este caso la segunda ecuación es proporcional a la primera: $2x - 2/3y = -1$
c) La segunda ecuación debe decir algo contradictorio con la primera: $6x - 2y = 1$

25. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ y-6z=7 \\ -2y=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x+1-1=1 & \rightarrow & x=1 \\ 1-6z=7 & \rightarrow & z=-1 \\ y=1 & & \end{matrix}$$

La solución es: $x = 1$; $y = 1$; $z = -1$.

26. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{2}-z=3 \\ 2y-z=11 \end{cases}$

a) En el sistema $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ ponemos en primer lugar la segunda ecuación y

$$\begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E4-4E1 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+z=-1 \\ -6y-7z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 6E2+5E3 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+z=-1 \\ -29z=29 \end{cases}$$

y el sistema escalonado nos da las soluciones: $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

b) En el sistema $\begin{cases} 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{2}-z=3 \\ 2y-z=11 \end{cases}$ multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la cambiamos por la primera quedando:

$$\begin{cases} x-2z=6 \\ 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ 2y-z=11 \end{cases} \Leftrightarrow E2-2E1 \begin{cases} x-2z=6 \\ -4y+\frac{9}{2}z=-11 \\ 2y-z=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2E3-E2 \begin{cases} x-2z=6 \\ -4y+\frac{9}{2}z=-11 \\ \frac{9}{2}z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{74}{5} \\ y=\frac{154}{20}=\frac{77}{10} \\ z=\frac{22}{5} \end{cases}$$

27. Dos números se diferencian en 53 unidades. Al dividir el mayor entre el menor, se obtiene de cociente 2 y resto 21. Calcula cada número.

Sea el número mayor e y el menor. Se cumple:

$$\begin{cases} x-y=53 \\ x=2y+21 \end{cases} \Rightarrow x=85;\ y=32$$

28. Se mezclan dos tipos de pipas de girasol, de 6,6 y 8,7 euros/kg, respectivamente, obteniéndose 200 kgs. Al secarse, pierden un 12 % de su peso, vendiéndose el conjunto a 9,6 euros/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de pipas se tenía en un principio si el valor de la venta ha sido el mismo?

Sean x e y los kilos originarios de cada tipo de pipas.
Nos dicen que $x + y = 200$.
Además, al perderse un 12 % = 0,12 de peso, nos quedará 0,88 por cada kilogramo, en total $200 \cdot 0,88 = 176$ kilos.
El valor de esas pipas es: $176 \cdot 9,6 = 1\,689,6$ €.
El valor inicial era $6,6x + 8,7y$ €.
Como son iguales: $6,6x + 8,7y = 1\,689,6$.
Se obtiene el sistema siguiente, que resolveremos por sustitución:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 6,6x+8,7y=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6,6x+8,7y=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=200-x \\ 6,6x+8,7(200-x)=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6,6x-8,7=1689,6-1740 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ -2,1x=-50,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ x=\frac{50,4}{2,1}=24 \end{cases}$$

Se mezclaron, entonces, 24 kg de un tipo e $y = 200 - 24 = 176$ kilos del otro tipo de pipas.

29. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el lado mayor es $\frac{5}{3}$ del menor y que si éste aumenta en 2 m la relación se convierte en $\frac{3}{2}$.

Sea x el lado mayor e y el menor. Se verifica:
$x=\frac{5}{3}$ y en sus dimensiones originales y al aumentar el pequeño en 2 m se cumple que: $x=\frac{3}{2}(y+2)$.

Estas relaciones forman el sistema $\begin{cases} x=\frac{5}{3}y \\ x=\frac{3}{2}(y+2) \end{cases}$,

cuya solución es: $x = 30$ m, $y = 18$ m.

30. Un cicloturista recorre 87 km en 4,5 h. La primera parte de la ruta es cuesta arriba y su velocidad es de 15 km/h, mientras que la segunda parte es descendente y su velocidad se eleva a 42 km/h. Halla la longitud de cada tramo.

Si denominamos por x los km del tramo ascendente e y los del tramo descendente. La relación de la cinemática: espacio = velocidad · tiempo, ($e = vt$) nos proporciona las relaciones:
$x = 15 \cdot t$, $y = 42 \cdot (t - 4,5)$, pues 4,5 h es el tiempo empleado en todo el recorrido.
Además, el total de kilómetros establece que $x + y = 87$, luego se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x=15\cdot t \\ y=42\cdot(4{,}5-t) \\ x+y=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{42}=4{,}5-\dfrac{x}{15} \\ x+y=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x+5y=945 \\ x+y=87 \end{cases}$$

La solución que proporciona es $x=\dfrac{170}{3}$ km e $y=\dfrac{91}{3}$ km

31. Discute, según los diferentes valores de *a*, el sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=6 \\ ax-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$$

El sistema es incompatible si $\dfrac{-1/3}{a}=\dfrac{1/5}{-1/2}\neq\dfrac{6}{1}\Rightarrow a=\dfrac{5}{6}$ y por tanto determinado si a diferente de 5/6. Nunca será indeterminado.

32. Dado el sistema $\begin{cases} -x+\dfrac{1}{2}y=a \\ 3x+by=2 \end{cases}$**, halla *a* y *b* para que el sistema sea determinado, indeterminado e incompatible.**

El sistema es incompatible cuando $\dfrac{-1}{3}=\dfrac{1/2}{b}\neq\dfrac{a}{2}$ que ocurre si $b=-3/2$ y $a\neq-2/3$

Determinado es si $b\neq-3/2$, cualquiera que sea el valor de a.

33. La suma de las tres cifras de un número es 8. Si se cambian la cifra de las decenas por la de centenas, el número resultante es 90 unidades mayor. Además, la diferencia entre la cifra de unidades y el doble de la de decenas nos da la cifra de las centenas. Halla el número.

Sea el número xyz, cuyo valor será: $100x+10y+z$. En estas condiciones, pondremos las relaciones entre sus cifras: $x+y+z=8$, $z-2y=x$.

Respecto al valor del número, las condiciones del enunciado nos dan: $100y+10x+z=100x+10y+z+90$. Estas ecuaciones forman el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ z-2y=x \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x+2y-z=0 \\ 90x-90y=-90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x+2y-z=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ que podemos resolver escalonadamente,

resultando: $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x-y=-1 \\ 5x=5 \end{cases}$, es decir $x=1$, $y=2$, $z=5$.

El número es 125.

34. Una empresa ha invertido 73 000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases *A*, *B* y *C*, cuyos costes por unidad son de 2 400 €, 1 200 € y 1 000 € respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo *A* ha sido la misma que la invertida en los de tipo *B*, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.

Supongamos que el número de ordenadores que se compran de las clases A, B y C son x, y, z respectivamente.

Cantidad invertida: $2\,400x+1\,200y+1\,000z=73\,000\Rightarrow$ $12x+6y+5z=365$

Nº de ordenadores: $x+y+z=55$

Relación entre cantidades: $2\,400x=1\,200y\Rightarrow 2x=y$. Así tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 12x+6y+5z=365 \\ x+y+z=55 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \text{(sustituyendo y = } 2x\text{)}$$

$$\begin{cases} 48x+10z=730 \\ 3x+z=55 \end{cases} \Rightarrow \quad E1-10E2 \begin{cases} 18x=180 \\ 3x+z=55 \end{cases} \Rightarrow$$

$x=10$, $y=20$, $z=25$

35. En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quíntuplo de los de tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.

Si el número de alumnos de 1º, 2º y 3º son x, y, z, respectivamente, se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ 2x+y=5z+250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=350 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+y-5z=250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{array} \begin{cases} x+y+z=350 \\ -2y-3z=-350 \\ -y-7z=-450 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2E3+E2 \end{array} \begin{cases} x+y+z=350 \\ 2y+3z=350 \\ 11z=550 \end{cases} \Rightarrow z=50,\ y=100,\ z=200,$$

36. En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,8 €; cacao, 4 €; almendras, 13 €. En un día se fabrican 9 000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25 800 €. ¿Cuántos kg se utilizan de cada ingrediente?

Sean x, y, z los kilos de leche, cacao y almendras, respectivamente, que se emplean cada día.

Debe cumplirse:

$x+y+z=9\,000$

$x=2(y+z)$

$0{,}8x+4y+13z=25\,800$

Queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=9000 \\ x-2y-2z=0 \\ 0{,}8x+4y+13z=25\,800 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ E2+2E1 \\ E3-4E1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9000 \\ 3x=18\,000 \\ -3{,}2x+9z=-10\,200 \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la tercera y en la primera ecuación, se obtiene: $x=6\,000$; $y=2\,000$;

$z = 1000$. Se utilizan 6000 kg de leche, 2000 kg de cacao y 1000 kg de almendras.

Tipo V. Sistemas no lineales.

37. Resuelve el sistema $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$ y representa gráficamente las soluciones.

Lo resolvemos por igualación: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=x^2 \Rightarrow x = x^4$

$\Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

Para $x = 0$, $y = 0$; para $x = 1$, $y = 1$. O sea, los puntos solución son (0, 0) y (1, 1).

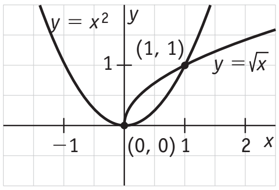


Fig. 4.1.

38. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{6}=\dfrac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=24 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{6}=\dfrac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{6}{x}=5 \Rightarrow x^2-5x+6=0,$

con soluciones $x = 3$ y $x = 2$, lo que induce $y = 2$ e $y = 3$, respectivamente.

b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$, despejamos $y = 2/x$ en la 2ª ecuación y sustituimos en la 1ª: $2x^2+\dfrac{12}{x^2}=11 \Rightarrow 2x^4-11x^2+12 = 0$, ecuación bicuadrada que nos proporciona las 4 soluciones, $x = \pm 2$ y $x = \pm\sqrt{3}/2$ y sus correspondientes de $y = \pm 1$ e $y = \pm 4/\sqrt{3}$.

c) $\begin{cases} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ x^2+(2x-1)^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+4x^2+1-4x=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-4x-1=0$

nos da $x = 1$ y $x = -1/5$ como soluciones, induciendo los valores de $y = 1$ e $y = -7/5$

d) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+y \\ (4+y)^2-y^2=24 \end{cases} \Rightarrow$

desarrollando la segunda ecuación obtenemos, $16 + 8y = 24$ $\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 5$

39. Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo cuya área mide 20 cm² son dos números enteros consecutivos. ¿Cuánto mide la altura?

Llamemos x y $x + 1$ las longitudes de los lados del rectángulo, por ello: $x(x + 1) = 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ como única solución aceptable.

40. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de perímetro 110 m y área 700 m².

Designemos por x e y las longitudes de los lados, entonces puede plantearse el sistema:

$\begin{cases} 2x+2y=110 \\ xy=700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=55 \\ xy=700 \end{cases} \Rightarrow$ despejamos y en la 1ª ecuación y sustituimos en la 2ª: $x(55 - x) = 700 \Rightarrow x^2 - 55x + 700 = 0 \Rightarrow x = 35, x = 20$ que inducen los valores de $y = 20$ e $y = 35$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Encuentra tres soluciones de la ecuación $-x + 5y = 10$ y haz una representación gráfica de la misma.

$x = 5y - 10 \Rightarrow$ tres pares de valores solución pueden ser: $y = 2$, $x = 0$; $y = 1$, $x = -5$; $y = 3$, $x = 5$.

2. ¿Son equivalentes los sistemas $\begin{cases} x=3 \\ \dfrac{y-x}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ y $\begin{cases} y-1=3 \\ 2x=y-2 \end{cases}$?

No, ya que $x = 3$, $y = 4$ es solución del primer sistema y no lo es del segundo.

3. Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ y=-1 \end{cases}$ de modo que resulte incompatible.

Por ejemplo, una ecuación contradictoria con la primera: $x + y = 5$

4. Resuelve el sistema $\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+1=-x \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+1=-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2y-1 \\ -y-1=x \end{cases} \Leftrightarrow 2y-1=-y-1 \Rightarrow y=0, x=-1$

5. Encuentra gráficamente la solución del sistema $\begin{cases} x=-1+y \\ x+y=1 \end{cases}$

La solución puede verse es $x = 0$ e $y = 1$

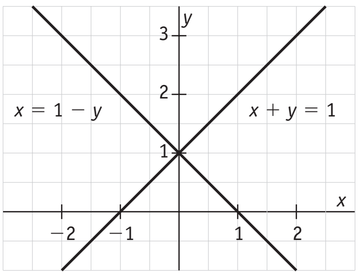


Fig. 4.2.

6. Resuelve la ecuación $(x+2)(3x-1)=0$.

$(x+2)(3x-1)=0 \Rightarrow 3x^2+5x-2=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1/3$

7. Halla las soluciones válidas de $\frac{x^3+x^2}{x^2}=0$.

$\frac{x^3+x^2}{x^2}=0 \Rightarrow x^3+x^2=x^2(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ ($x=0$ o puede admitirse).

8. Resuelve la ecuación $\frac{\sqrt{x}}{2}=x$.

$\frac{\sqrt{x}}{2}=x \Rightarrow \sqrt{x}=2x \Rightarrow x=4x^2 \Rightarrow x(4x-1)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=1/4$ son las soluciones, ambas válidas.

9. Razona si los sistemas $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=1-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=1-y \\ 2x-y=1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ son equivalentes sabiendo que $x=y=1$ es solución del primero.

No, ya que la tercera ecuación del segundo sistema no es satisfecha por $x=y=1$

10. Un padre tiene 36 años y su hija 6. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple que la de la hija?

Si esto ocurrirá dentro de x años, las edades respectivas serán: $36+x$ y $6+x$;
y la relación entre ellas, el triple: $36+x=3(6+x)$.
La solución de esta ecuación es $x=9$ años.

Actividades

1. Un vendedor de libros tiene un contrato con una editorial, por el cual percibe 300 euros de sueldo fijo más 90 euros por enciclopedia que venda. Recibe una oferta de trabajo de otra editorial, por la que le ofrecen 140 euros por cada venta, pero sin remuneración fija. ¿Cuántas enciclopedias debe vender para que le convenga, económicamente, cambiar de editorial?

Si x es el número de enciclopedias vendidas, para la primera editorial cobra: $300 + 90 \cdot x$ y para la segunda, $140 \cdot x$. Si queremos que
$300 + 90x < 140x$ esta condición se cumple si $x > \dfrac{300}{140-90} = 6$

2. Halla el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} \mathbf{2x+3<5} \\ \mathbf{5-x<7} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3<5 \\ 5-x<7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{5-3}{2}=1 \\ 5-7=2<x \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<1$$

3. Halla la solución de las inecuaciones:

a) $x^2 - 2x - 3 < 0$;
b) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
c) $x^2 + 4 > 0$

a) Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x = -1$ y $x = 3$, por lo que
$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. A la vista de los signos de cada binomio, se forma la tabla:

	$-\infty$ a -1	-1 a 3	3 a $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$-$	$+$	$+$

donde se deduce que en el intervalo $(-1, 3)$ el trinomio $x^2 - 2x - 3$ es negativo.

b) La ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución real, resultando que para todo valor de x, $x^2 - 2x + 2$ es mayor que 0 por lo que la inecuación propuesta no tiene solución.

c) $x^2 + 4 = 0$, como en el caso anterior, no tiene solución real y $x^2 + 4$ es siempre positivo, siendo todo número real solución.

4. Halla la solución de la inecuación $(x^2-4)(x-1)(x-5) < 0$.

Estudiamos el signo de cada uno de los factores:

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a 2	2 a 5	5 a ∞
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
Producto	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es:

5. Encuentra las soluciones de las inecuaciones:

a) $0 \leqslant \dfrac{x^2-4}{x+1}$ **b) $2 < \dfrac{x^2+1}{x}$**

a) Como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ podemos formar la tabla:

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 2	2 a ∞
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Donde vemos la solución $[-2, -1) \cup [2, \infty)$

b) $2 < \dfrac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2+1}{x} - 2 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2+1-2x}{x} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{(x-1)^2}{x}$ ya que $(x-1)2$ siempre es positivo, el signo del cociente depende de x, así que la solución es el intervalo $(0, \infty)$

6. Resuelve la inecuación $|x^2-6x| < 5$.

$|x^2-6x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x^2 - 6x < 5 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 6x + 5$ y
$x^2 - 6x - 5 < 0$
La solución de $0 < x^2 - 6x + 5$ es $x<1$ o $x>5$:
$x \in (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$
La solución de $x^2 - 6x - 5 < 0$ son todos los puntos del intervalo, $(3\sqrt{14},3+\sqrt{14})$
pues las soluciones de $x^2 - 6x - 5 < 0$ son $x=3-\sqrt{14}$ y $x=3+\sqrt{14}$
Por tanto, la solución de $|x^2+6x|<5$ son todos los valores de $x \in (3-\sqrt{14},1) \cup (5,3+\sqrt{14})$

7. Halla la solución de las inecuaciones:

a) $\sqrt{x-1} \geqslant -1$ **b) $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{3} < 1$**

a) $\sqrt{x-1} \geqslant -1 \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 \geqslant (-1)^2 \Rightarrow x-1 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 2$; pero para que exista la raíz $x-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$, así que la solución será: $[1, \infty) \cap [2, \infty) = [1, \infty)$

b) $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{3} < 1 \Rightarrow$

$(\sqrt{2x+2})^2 < 3 \Rightarrow 2x+2 < 9 \Rightarrow x < \dfrac{9-2}{2} = \dfrac{7}{2}$;

de nuevo, para que exista el numerador $2x+2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$. Así pues, la solución global es
$[-1, \infty) \cap (-\infty, 7/2) = [-1, 7/2)$

8. Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} \mathbf{2x-y > 1} \\ \mathbf{5x+10y \leqslant 30} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-y > 1 \\ 5x+10y \leqslant 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y > 1 \\ x+2y \leqslant 6 \end{cases}$$

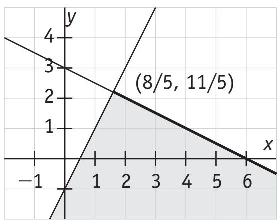


Fig. 5.1.

Problemas propuestos

Tipo I. Inecuaciones de primer grado.

1. Resuelve las inecuaciones:

a) $3x < 0$ **b)** $\frac{x}{5} \geqslant -1$

c) $1 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{x} < \frac{-1}{2}$

a) $x<0$ b) $x \geqslant -5$

c) $x \geqslant 2/3$ d) $\frac{2}{x} < \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} > -2 \Rightarrow x > -4$

2. Halla el intervalo solución de las inecuaciones:

a) $\frac{x}{3} - 5x \leqslant 1 - \frac{x}{2}$ **b)** $\frac{x+3}{-2} < \frac{x-1}{6} + 1$

a) $\frac{x}{3} - 5x \leqslant 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow 2x - 30 \leqslant 6 - 3x \Rightarrow -6 \leqslant 25x \Rightarrow -6/25 \leqslant x$

b) $\frac{x+3}{-2} < \frac{x-1}{6} + 1 \Rightarrow -3x - 9 < x - 1 + 6 \Rightarrow -14 < 4x \Rightarrow -7/2 < x$

3. Halla el intervalo solución de $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{5}{x}$

$\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{5}{x}$ (multiplicamos por x^2 los dos miembros) $\Rightarrow$
$3 - x \leqslant 5x \Rightarrow 3 < 6x \Rightarrow 1/2 < x$

4. Un pastor afirma que en su rebaño de 120 ovejas, el triple de las *churras* es mayor que el cuádruplo de las *merinas*. ¿Qué número mínimo de ovejas *churras* tiene el rebaño?

Sean x el número de *churras*: $3x > 4(120 - x) \Rightarrow 7x > 480 \Rightarrow$
$x > 480/7 = 68{,}57 \Rightarrow x \geqslant 69$ ovejas.

5. Halla los valores de a para los que el punto $(-3, 1)$ es solución de la inecuación $ax - 2y > -2$

Si el punto $(-3, 1)$ es solución, se debe cumplir:
$-3a - 2 > -2 \Rightarrow a < 0$

Tipo II. Inecuación de segundo grado.

6. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $x(x+1) < 0$ **b)** $-2x^2 + 10 > 26$
c) $4x^2 + 4x > 0$

a) $x(x+1) < 0$ las raíces son -1 y 0, por lo que :

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$(x+1)\cdot x$	$+$	$-$	$+$

Y la solución será el intervalo: $(-1, 0)$

b) $-2x^2 + 10 > 26 \Rightarrow 2x^2 < -16$ ¡que es imposible!

c) $4x^2 + 4x > 0 \Rightarrow 4x(x+1) > 0$ y recordando el caso a) la solución es el intervalo unión de $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

7. Halla el intervalo solución de:

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ **b)** $-2x^2 + 9x + 18 < 0$

a) La ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$ tiene una solución doble $x = -\frac{1}{2}$, por lo que: $4x^2 + 4x + 1 = 4(x + \frac{1}{2})^2$ que siempre es positivo, luego la inecuación $4x^2 + 4x + 1 > 0$ se cumple para todo $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

b) Si cambiamos de signo la inecuación nos queda:
$2x^2 - 9x - 18 > 0$. Como las raíces de la ecuación $2x^2 - 9x - 18 = 0$ son $x = 6$ y $x = -\frac{3}{2}$,
$2x^2 - 9x - 18 = 2(x-6)(x + \frac{3}{2})$ y construyendo el diagrama:

	$-\infty$ … $-3/2$	$-3/2$ … 6	6 … $+\infty$
$x + 3/2$	$-$	$+$	$+$
$x - 6$	$-$	$-$	$+$
$(x+3/2)\cdot(x-6)$	$+$	$-$	$+$

vemos que en los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y $(6, \infty)$ se verifica que $2x^2 - 9x - 18 > 0$.

8. Halla gráficamente la solución de las inecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 9x < 0$ **b)** $3x^2 - 27 > 0$
c) $(x+1)(x-3) > 0$

a) La parábola $y = 2x^2 + 9x$ corta al eje de abscisas en los puntos $2x^2 + 9x = x(2x+9) = 0$, es decir en $x = 0$ y $x = -\frac{9}{2}$. Su gráfica evoluciona como se muestra y es negativa en $(-\frac{9}{2}, 0)$.

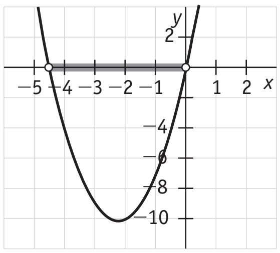


Fig. 5.2.

b) La parábola $y = 3x^2 - 27$ corta al eje OX en $x = \pm 3$. En este caso la gráfica aparece como en la Figura y las semirrectas solución son las representadas.

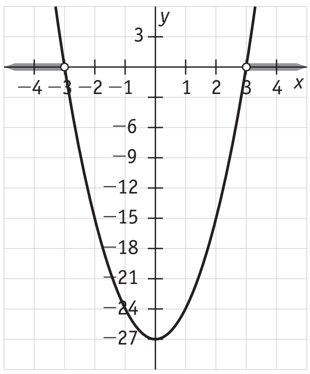


Fig. 5.3.

c) La parábola $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$ interseca al eje de abscisas en los puntos $x=-1$ y $x=3$. La Figura nos muestra la solución:

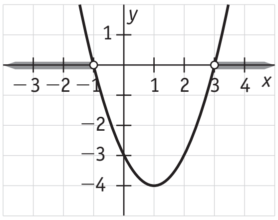


Fig. 5.4.

9. Se dispone de un terreno en forma de triángulo rectángulo en el que un cateto tiene triple longitud que el otro. ¿A partir de qué largura del lado menor la superficie del terreno es superior a 37,5 m²?

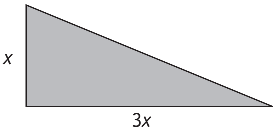


Fig. 5.5.

Sea x la longitud del cateto menor y entonces $3x$ será la del mayor. El área del triángulo es $A=\frac{1}{2}x\cdot 3x=\frac{3x^2}{2}$ que ha de superar los 37,5 m². Luego

$\frac{3x^2}{2}>37{,}5 \Rightarrow 3x^2>75 \Rightarrow x^2>25 \Rightarrow x^2-25>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+5)(x-5)>0$. Inecuación que por el cuadro que construimos

$-\infty$ $\quad -5 \quad$ 5 $\quad +\infty$

$x+5$	−	+	+
$x-6$	−	−	+
$(x+5)\cdot(x-5)$	+	−	+

nos proporciona como única solución admisible los valores del intervalo $(5,\infty)$ pues en otro caso, tendríamos longitudes negativas.

10. Halla los valores que pueden tener las longitudes de los lados de un rectángulo si su perímetro ha de ser menor que 20 metros y su área igual a 9 m².

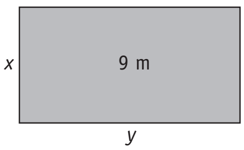


Fig. 5.6.

Se ha de cumplir que el perímetro $2x+2y<20$ y el área $x\cdot y=9 \Leftrightarrow y=9/x$. Así, sustituyendo en la inecuación:
$2x+2\cdot 9/x<20 \Rightarrow x+9/x<10 \Rightarrow x^2+9-10x<0 \Rightarrow (x-9)(x-1)<0$, que se resuelve

$-\infty$ $\quad 1 \quad$ 9 $\quad +\infty$

$x-1$	−	+	+
$x-9$	−	−	+
$(x-1)\cdot(x-9)$	+	−	+

Como x ha de cumplir $1<x<9$, la variable y varía $9>y>1$ pues su producto es constante igual a 9.

Tipo III. Otras inecuaciones.

11. Resuelve:
a) $x^3<-1$ **b)** $x^3+8\geqslant 0$ **c)** $\frac{1}{x^3}<1$

Son inmediatas.
a) $x^3<-1 \Leftrightarrow x<-1$
b) $x^3+8\geqslant 0 \Leftrightarrow x^3\geqslant -8 \Leftrightarrow x\geqslant -2$
c) Para $x<0$, siempre se cumple.
Para $x>0$, $\frac{1}{x^3}<1 \Leftrightarrow 1<x^3 \Rightarrow x<1$.
La solución es: $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$

12. Halla el conjunto solución de:
a) $x^4+x^2>3$ **b)** $x^4-x^2\leqslant 0$
c) $x^4+1<0$ **d)** $(x+1)^3(x-2)\geqslant 0$

a) $x^4+x^2>0 \Leftrightarrow x^2(x^2+1)>0$, que se cumple para todo x, menos para $x=0$.
b) $x^4-x^2\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2-1\leqslant 0 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$
c) $x^4+1<0$ no tiene solución, pues siempre es $\geqslant 1$
d) $(x+1)^3(x-2)\geqslant 0$. Marcamos en la recta $x=-1$ y $x=2$:

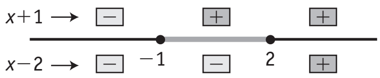


Fig. 5.7.

La solución es $x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

13. Resuelve:
a) $x^4-8x^2+16\leqslant 0$
b) $2x^4+x^2-3\geqslant 0$
c) $x^4-3x^2+2<0$
d) $x^4+2x^3-x^2+4x-6>0$

En todos los casos se descompone en factores; hay que observar que las tres primeras expresiones son bicuadradas.
a) $x^4-8x^2+16\leqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-4)^2\leqslant 0$, que sólo se cumple cuando $x=\pm 2$.
b) $2x^4+x^2-3\geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+3/2)\geqslant 0 \Leftrightarrow$ $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
c) $x^4-3x^2+2<0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2)<0 \Leftrightarrow$ $x\in(-\sqrt{2},-1]\cup[1,+\sqrt{2})$
d) $x^4+2x^3-x^2+4x-6>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2+2)>0 \Leftrightarrow$ $x\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

14. Halla la solución de:
a) $\frac{2}{3x-2}\leqslant 0$ **b)** $\frac{x+2}{2x-1}\leqslant 1$ **c)** $0\leqslant\frac{-x}{x^2+1}$

a) Como el numerador es positivo en $\frac{2}{3x-2}\leqslant 2 \Rightarrow 3x-2<0$ para que el cociente sea negativo, así $x<2/3$.

b) $\frac{x+2}{2x-1}\leqslant 1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-1}-1\leqslant 0 \Rightarrow \frac{3-x}{2x-1}\leqslant 0 \Rightarrow \frac{3-x}{2(x-1/2)}\leqslant 0$

que da lugar a la tabla:

	$-\infty$ — $1/2$	$1/2$ — 3	3 — $+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$x-1/2$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{3-x}{2(x-1/2)}$	$-$	$+$	$-$

Y la solución es $(-\infty, 1/2)\cup[3, \infty)$

c) En $0\leqslant\dfrac{-x}{x^2+1}$ el denominador es siempre positivo, así que $-x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 0$

15. Representa en la recta la solución de las inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{x}{4}\right|\leqslant 1$ **b)** $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 2$

c) $\left|\dfrac{x}{3}-2\right|\leqslant -1$

a) $\left|\dfrac{x}{4}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant x/4\leqslant 1 \Rightarrow -4\leqslant x\leqslant 4$

Fig. 5.8.

b) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 2 \Leftrightarrow \quad x+\dfrac{1}{2}\geqslant 2$ o bien $x+\dfrac{1}{2}\leqslant -2 \quad\Rightarrow x\geqslant 3/2$ o bien $x\leqslant -5/2$. La solución es: $(-\infty, -5/2]\cup[3/2, \infty)$.

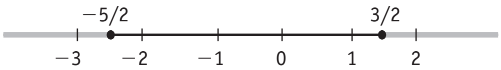


Fig. 5.9.

c) $\left|\dfrac{x}{3}-2\right|\leqslant -1$ es imposible pues el valor absoluto da valores siempre positivos

16. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x^2-3|\leqslant 1$ **b)** $|x^2-3|<3$ **c)** $|x^2-3|\leqslant 6$

a) $|x^2-3|\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 2\leqslant x^2\leqslant 4 \;\Leftrightarrow\; x\in[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2]$

b) $|x^2-3|<3 \Leftrightarrow\; 0<x^2<6 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\sqrt{6},\sqrt{6})-\{0\}$

c) $|x^2-3|\leqslant 6 \Leftrightarrow -3\leqslant x^2\leqslant 9 \Leftrightarrow\; x\in[-3,3]$

17. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x^2-x|\leqslant 1$ **b)** $|x^2+2x|\leqslant 0$ **c)** $|x^2+4x|\geqslant 4$

a) $|x^2-x|\leqslant 1 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2-x+1$ y $x^2-x-1\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

b) $|x^2+2x|\leqslant 0 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2+2x\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 2x=0 \;\;\Leftrightarrow x=-2$ o $x=0$

c) $|x^2+4x|\geqslant 4 \Leftrightarrow 0\geqslant x^2+4x+4$ o $x^2+4x-4\geqslant 0 \;\Leftrightarrow$
$x\in(-\infty,-2-2\sqrt{2}]\cup[-2,+2\sqrt{2},+\infty]\cup\{-2\}$

18. Resuelve las inecuaciones:

a) $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{3}$ **b)** $\sqrt{x+2}>2$ **c)** $\dfrac{-1}{\sqrt{2x+3}}>-2$

a) $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{3} \;\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 1/9$ que es el intervalo $[0, 1/9]$

b) Para que $\sqrt{x+2}>2$ debe de cumplirse $x+2\geqslant 0$ para que exista la raíz y $(\sqrt{x+2})^2>2^2$. Entonces, $x>-2$ y $x+2>4$ $\Leftrightarrow x>2$, que se verifica si $x>2$.

c) $\dfrac{-1}{\sqrt{2x+3}}>-2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}<2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\sqrt{2x+3}$ que se cumplirá de nuevo si:

- $2x+3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant -3/2$ y
- $(1/2)^2<2x+3 \Rightarrow 1/4-3<2x \;\Rightarrow -11/8<x$ que se verifica si $x>-11/8$

Tipo IV. Inecuaciones lineales con dos incógnitas.

19. Resuelve las inecuaciones:

a) $y>-1$ **b)** $\dfrac{y}{2}-1\leqslant 2$ **c)** $y\leqslant -x$

a) $y=-1$ es la recta representada y el área sombreada es la solución

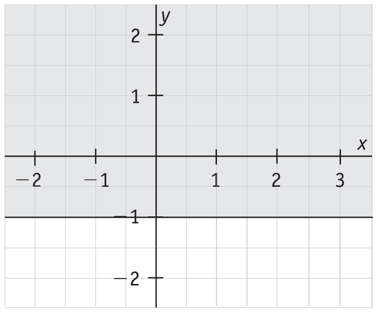


Fig. 5.10.

b) $\dfrac{y}{2}-1\leqslant 2 \Leftrightarrow y\leqslant 6$; si representamos la recta $y=6$, se obtiene la región

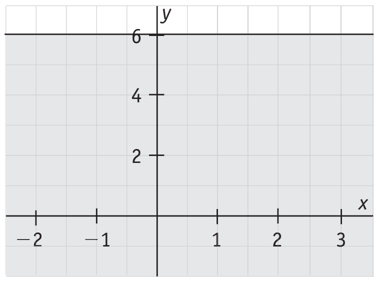


Fig. 5.11.

c) Se representa la recta $y=-x$ que es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes:

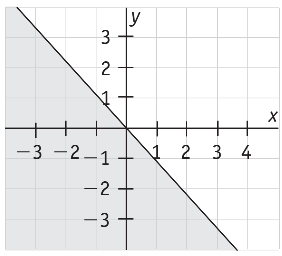


Fig. 5.12.

20. Halla en el plano la solución de:

a) $x - 2y \leqslant -1$

b) $\dfrac{x}{2} + y \geqslant 2$

c) $\dfrac{x-4y}{3} \geqslant 0$

a) La gráfica de la recta $x - 2y = -1$ es la mostrada en la gráfica y el área coloreada es la solución:

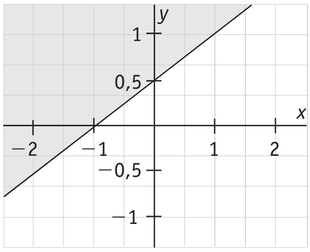


Fig. 5.13.

b) Dibujamos la recta $\dfrac{x}{2} + y = 2$ y el área por encima de ella es la solución de la inecuación planteada:

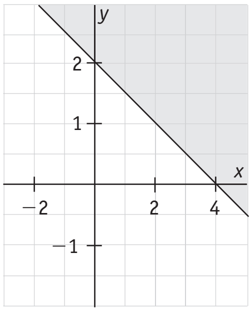


Fig. 5.14.

c) $\dfrac{x-4y}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 4y \geqslant 0$ y representamos la recta $x - 4y = 0$, estando por debajo de ella la solución:

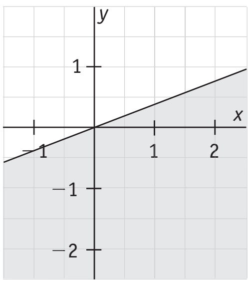


Fig. 5.15.

21. Resuelve gráficamente las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{2} \leqslant -1$

b) $\dfrac{x-y}{4} + \dfrac{y-x}{2} < 1$

a) La inecuación propuesta es equivalente a la $2x - 3y \leqslant 10$. Representamos la igualdad $2x - 3y = 10$ y se observa el área solución:

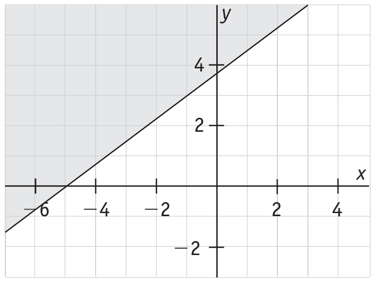


Fig. 5.16.

b) Simplificada la inecuación queda equivalente a $y - x < 4$; dibujemos la recta $y - x = 4$, mostrando la región solución:

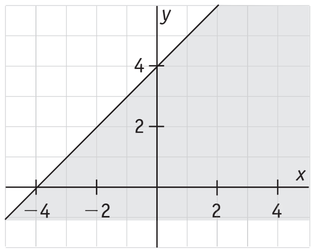


Fig. 5.17.

22. Halla los valores de *m* para los que el punto (1, *m*) es solución de la inecuación $-x - 2y < 1$

Si el punto es solución debe cumplir: $-1 - 2m < 1 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1$

23. Un representante percibe 5 € por cada artículo A vendido y 8 € por cada artículo B. Halla cuántos artículos debe vender para obtener unos ingresos al menos de 1800 €.

Los ingresos dependen del número de artículos A(x) y B(y) vendidos, así que aquéllos serán: $5x + 8y$ que han de superar 1800, o bien $5x + 8y > 1800$.

24. Una entrada de cine es de 6 € y un CD, 12 €. Indica qué combinaciones de gasto puede hacer Carlos entre esos dos artículos a lo largo del mes, si su presupuesto es de 72 € y teniendo en cuenta que no necesariamente ha de gastarse todos sus recursos en los bienes citados.

Llamemos x el número de entradas al cine e y el número de CD's que Carlos puede adquirir con su presupuesto en un mes, entonces $6x + 12y < 72 \Leftrightarrow x + 2y < 12$, con $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$; siendo x e y números naturales.

Tipo V. Sistemas de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas

25. Halla la solución:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \geqslant -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{-3} \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x > 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 \geqslant x - 1 \\ x > 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \geqslant -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 0$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{-3} \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 \\ x > 5 \end{cases}$

lo que no puede darse nunca ¡sistema imposible¡

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 \geqslant x-1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} \leqslant 2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leqslant 4$

26. Resuelve dando el resultado en forma de intervalo:

a) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2x-1 \geqslant 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x-3 > 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-1 \leqslant 2 \\ 2x > -1 \\ \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2x-1 \geqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant 7/2 \end{cases}$

que no puede verificarse, luego conjunto solución ϕ

b) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x-3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x > 8/2=4 \end{cases} \Rightarrow x > 4 \Leftrightarrow (4,\infty)$

c) $\begin{cases} x-1 \leqslant 2 \\ 2x > -1 \\ \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x > -\dfrac{1}{2} \\ x \leqslant \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ al intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

27. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x-y \leqslant 2 \\ 2x \geqslant 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2(x-1)-y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-\dfrac{y-1}{-1} \leqslant 0 \\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

a) Representamos en el mismo sistema de ejes coordenados las rectas $x-y=2$ y $x=3$:

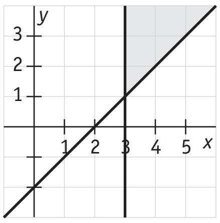


Fig. 5.18.

y las semirrectas, junto con el ángulo determinado es la solución.

b) En este caso las rectas a representar son $2x-y=4$ e $y=0$:

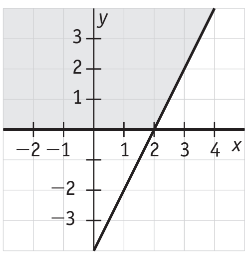


Fig. 5.19.

y la solución del sistema aparece marcada.

c)

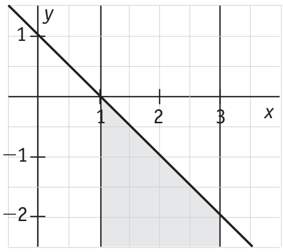


Fig. 5.20.

28. Encuentra el sistema cuya solución es la zona sombreada de la figura.

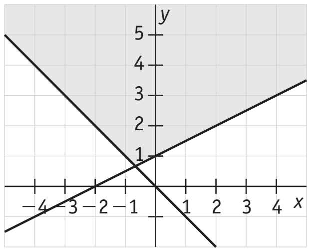


Fig. 5.21.

La recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 1)$ tiene por ecuación: $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}=1$ y la segunda recta es $y=-x$ (pasa por $(0, 0)$ y $(-2, 2)$), por lo que las inecuaciones serán:

$\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+y > 1 \\ y \geqslant -x \end{cases}$

29. Hace 10 años la edad de Juan era inferior a la mitad de la que tiene hoy y dentro de 18 años no superará al doble de la actual, ¿qué años tiene Juan?

Siendo x la edad actual, planteamos el sistema: $\begin{cases} x-10 < \dfrac{x}{2} \\ x+18 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{x}{2} < 10 \\ 18 < x \end{cases} \Leftrightarrow 18 < x < 20$, entonces Juan tiene 19 años pues la soución debe ser natural.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. ¿Es cierto que al despejar x en la inecuación $\dfrac{-x}{4} \geqslant \dfrac{-3}{2}$ resulta $x \leqslant 6$? Si fuera falso pon lo que sería correcto.

No, hay dos cambios de sentido en la desigualdad: $\dfrac{-1}{x} \geqslant \dfrac{-3}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3}$

2. Resuelve y representa en la recta real la solución de la inecuación $1-2x < x+1$

$1-2x < x+1 \Rightarrow 0 < 3x \Rightarrow 0 < x$

Fig. 5.22.

3. Halla la solución de $x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) < 0$ que se verifica si $x < -2$ o bien $x > 2$

4. Resuelve $\sqrt{1 - x} > 2$.

$1 - x > 4 \Rightarrow x < -3$

5. ¿Tiene solución la inecuación $(x + 1)^2 < 0$? Razona tu respuesta.

No puesto que $(x + 1)^2$ es positivo para cualquier x.

6. ¿Por qué las soluciones de las inecuaciones $\frac{x+1}{x^2+1} \geqslant 1$ y $x + 1 \geqslant 0$ son idénticas?

Porque el denominador $x^2 + 1$ siempre es positivo y eso hace que la solución de $\frac{x+1}{x^2+1} \geqslant 1$ sólo dependa del numerador.

7. La gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + 2$ es la mostrada en la figura adjunta. A partir de ella indica las soluciones de:

a) $-x^2 + x + 2 < 0$ **b) $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$**

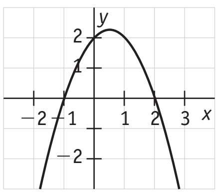


Fig. 5.23.

a) La expresión se verifica en los intervalos abiertos $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
b) El intervalo solución es el cerrado $[-1, 2]$.

8. La gráfica de la recta $3x + 8y = 24$ es la mostrada abajo. Indica las regiones solución de:
a) $3x + 8y = 24$ **b) $3x + 8y < 24$**
c) $3x + 8y > 24$

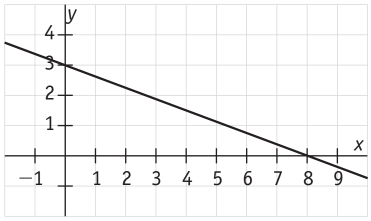


Fig. 5.24.

a) Es la propia recta
b) La región por debajo de la recta (en amarillo)
c) La región superior

9. Formula la inecuación cuya solución es la región sombreada.

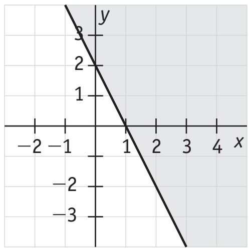


Fig. 5.25.

Como la recta pasa por los puntos (1, 0) y (0, 2), su ecuación es: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ y el área sombreada responde a la inecuación $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} \geqslant 1$ si se incluye la recta.

10. Resuelve y di los intervalos que contienen la solución de $|x + 1| \geqslant 1$.

$|x + 1| \geqslant 1$ se verifica si $x + 1 \geqslant 1$ o bien $x + 1 \leqslant -1 \Rightarrow x \geqslant 0$ o bien $x \leqslant -2 \Leftrightarrow (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

Actividades

1. Calcula:
a) $8\cdot 7!$; **b)** $\frac{17!}{15!}$ **c)** $\frac{6!\cdot 3!}{8!}$ **d)** $\frac{40!}{30!\cdot 20!}$

a) $8\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = 40\,320$

b) $\frac{17!}{15!}=\frac{17\cdot 16\cdot 15!}{15!}=17\cdot 16=272$

c) $\frac{6!\cdot 3!}{8!}=\frac{6!\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6!}=\frac{3}{28}$

d) $\frac{40!}{30!\cdot 20!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30!}{30!\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

$=\frac{37\cdot 31}{18\cdot 15\cdot 14\cdot 12\cdot 10\cdot 2}=\frac{1\,147}{907\,200}$

2. Calcula:
a) $\binom{8}{5}$ **b)** $\binom{17}{15}$ **c)** $\binom{16}{0}$ **d)** $\binom{9}{9}$

a) $\binom{8}{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=56$

b) $\binom{17}{17}=\frac{17\cdot 16\cdot 15}{3\cdot 2}=680$

c) $\binom{16}{0}= 1$

d) $\binom{9}{9}= 1$

3. Comprueba que $\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{7}$

$\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=210+120=330$

$\binom{11}{7}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}=330$

4. ¿De cuántas maneras puede elegirse entre 30 alumnos de un curso al delegado y subdelegado?

$V_{30,\,2}=30\cdot 29=870$

5. Con los dígitos 0 y 1 se forman números de 10 cifras. Responde:
a) ¿Cuántos números distintos pueden formarse?
b) ¿Cuántos de ellos comienzan por 111?
c) ¿Cuántos comienzan por 1 y terminan en 1?

a) $VR_{2,\,10}=2^{10}=1024$

b) 111 _ _ _ _ _ _ _ $\rightarrow$ $VR_{2,\,7}=2^7=128$

c) 1_ _ _ _ _ _ _ _ 1 $\rightarrow$ $VR_{2,\,8}=2^8=256$

6. En una clase de 25 alumnos se van a elegir por sorteo tres alumnos, ¿cuántas ternas diferentes pueden formarse?

Como no importa el orden se trata de un problema de combinaciones de 25 elementos tomados 3 a 3. Su número es

$C_{25,3}=\binom{25}{3}=\frac{25!}{3!\cdot 22!}=\frac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1}=2\,300$

Problemas propuestos

Tipo I. Factoriales y números combinatorios.

1. Opera las siguientes expresiones:
a) $\frac{12!}{10!}$ **b)** $5!\cdot 3!$ **c)** $\frac{102!}{8!\cdot 97!}$
d) $7!\cdot\frac{4!}{9!}$; **e)** $\frac{14!}{10!\cdot 4!}$

a) $\frac{12!}{10!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=12\cdot 11=132$

b) $5!\cdot 3! = (5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1) = 120\cdot 6 = 720$;

c) $\frac{102!}{8!\cdot 97!}=\frac{102\cdot 101\cdot 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97!}{(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot 97!}=$

$=\frac{102\cdot 101\cdot 100\cdot 99\cdot 98}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{17\cdot 101\cdot 5\cdot 33\cdot 7}{8}=\frac{1983135}{8}$

d) $7!\cdot\frac{4!}{9!}=\frac{7!\cdot 4!}{9!}=\frac{7!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$

e) $\frac{14!}{10!\cdot 4!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=$

$7\cdot 3\cdot 11=1001$

2. Calcula:
a) $\binom{15}{11}$ **b)** $\binom{6}{4}$ **c)** $\binom{7}{7}$ **d)** $\binom{6}{0}$

a) $\binom{15}{11}=\frac{15!}{11!\cdot(15-11)!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11!}{11!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=$

$=15\cdot 7\cdot 13=1365$

b) $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=3\cdot 5=15$

c) $\binom{7}{7}=\frac{7!}{7!\cdot(7-7)!}=\frac{7!}{7!\cdot 0!}=1$

d) $\binom{6}{0}=\frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}=\frac{6!}{0!\cdot 6!}=1$

3. Calcula:
a) $\binom{8}{7}-\binom{5}{3}$ **b)** $\frac{\binom{14}{8}}{\binom{13}{6}}$

a) $\binom{8}{7}-\binom{5}{3}=8-\frac{5\cdot 4}{2}=8-10=-2$

b) $\dfrac{\binom{14}{8}}{\binom{13}{6}} = \dfrac{\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{6''5\cdot4\cdot3\cdot2}}{\dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4}$

4. Comprueba que:

a) $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}=\binom{16}{5}$ **b)** $P_6\cdot C_{8,3}=P_8$

a) $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}=\dfrac{15!}{4!\cdot11!}+\dfrac{15!}{5!\cdot10!}=1365+3003=4368$

Por otra parte, $\binom{16}{5}=\dfrac{16!}{5!\cdot11!}=4368$

b) $P_6\cdot C_{8,3}=6!\cdot\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}=8!=P_8$

5. Calcula

a) $V_{6,4}$ **b)** $\dfrac{V_{7,4}}{P_5}$ **c)** $\dfrac{C_{6,3}\cdot V_{10,3}}{P_8}$

a) $V_{6,4}=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

b) $\dfrac{V_{7,4}}{P_5}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=7$

c) $\dfrac{C_{6,3}\cdot V_{10,3}}{P_8}=P_6\cdot C_{8,3}=\dfrac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}\cdot10\cdot9\cdot8}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=\dfrac{5}{14}$

6. a) Calcula el valor de $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}$**.**

b) Aplicando el resultado del apartado a) halla $\binom{15}{1}+2\binom{15}{2}$

a) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}=n+2\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}=n+n^2-n=n\ =n^2$

b) $\binom{15}{1}+2\binom{15}{2}=15^2=225$

7. Resuelve las ecuaciones:

a) $V_{n,2}=42$ **b)** $C_{n,2}=36$ **c)** $V_{n,4}=30\cdot C_{n,5}$

a) $V_{n,2}=42 \Leftrightarrow n\cdot(n-1)=42 \Rightarrow n=7$

b) $C_{n,2}=36 \Leftrightarrow \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}=36 \Rightarrow n\cdot(n-1)=72 \Rightarrow n=9$

c) $V_{n,4}=30\cdot C_{n,5} \Leftrightarrow n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)=$

$=30\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2} \Rightarrow n-4=4 \Rightarrow n=8$

8. Resuelve:

a) $3C_{n,4}-5C_{n,2}=0$ **b)** $5C_{n+1,3}-\dfrac{V_{n,4}}{4}=0$

a) $3C_{n,4}-5C_{n,2}=0 \Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2}=5\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$

$\Rightarrow (n-2)(n-3)=20 \Rightarrow n-2=5 \Rightarrow n=7$

b) $5C_{n+1,3}-\dfrac{V_{n,4}}{4}=0 \Leftrightarrow$

$5\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2}-\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}=0 \Rightarrow$

$20(n+1)-6(n-2)(n-3)=0 \Rightarrow 3n^2-25n+8=0 \Rightarrow n=8$

9. Resuelve la ecuación $4\binom{19}{n}=19\binom{17}{n}$

$4\binom{19}{n}=19\binom{17}{n} \Rightarrow 4\cdot\dfrac{19!}{n!(19-n)!}=19\cdot\dfrac{17!}{n!(17-n)!} \Rightarrow$

$\dfrac{4\cdot19\cdot18\cdot17!}{n!(19-n)!}=\dfrac{19\cdot17!}{n!(17-n)}$

Simplificando: $\dfrac{4\cdot18}{(19-n)(18-n)(17-n)!}=\dfrac{1}{(17-n)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{72}{(19-n)(18-n)}=1 \Rightarrow 72=(19-n)(18-n) \Rightarrow n=10$

Tipo II. Potencia de un binomio.

10. Calcula, simplificando el resultado, las siguientes potencias:

a) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^6$ **b)** $(x+2y)^5$ **c)** $(x-3y)^3$

d) $(1+\sqrt{3})^4$ **e)** $(x-x^2)^4$ **f)** $(2-x)^7$

g) $(\sqrt{2}-1)^3$ **h)** $(2x^2-3y)^4$

a) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^6=$

$\binom{6}{0}(2x)^6-\binom{6}{1}(2x)^5\cdot\dfrac{1}{2}+\binom{6}{2}(2x)^4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\binom{6}{3}(2x)^3\cdot$

$\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\binom{6}{4}(2x)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-\binom{6}{5}(2x)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=$

$=64x^6-96x^5+60x^4-20x^3+\dfrac{15}{4}x^2-\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{64}$

b) $(x+2y)^5=$

$x^5+5x^4(2y)+10x^3(2y)^2+10x^2(2y)^3+5x(2y)^4+(2y)^5=$

$=x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$

c) $(x-3y)^3=$

$=x^3-3x^2(3y)+3x(3y)^2-(3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

d) $(1+\sqrt{3})^4=1+4\sqrt{3}+6(\sqrt{3})^2+4(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^4=$

$=28+16\sqrt{3}$

e) $(x-x^2)^4=$

$x^4-4x^3\cdot x^2+6x^2\cdot x^4-4x\cdot x^6+x^8=x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8$

f) $(2-x)^7=$

$=2^7-7\cdot2^6+21\cdot2^5x^2-35\cdot2^4x^3+35\cdot2^3x^4-21\cdot2^2x^5+7\cdot2x^6-x^7=$

$=128-448x+672x^2-560x^3+280x^4-84x^5+14x^6-x^7$

g) $(\sqrt{2}-1)^3=(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-1=5\sqrt{2}-7$

h) $(2x^2-3y)^4=$

$=(2x^2)^4-4(2x^2)^3(3y)+6(2x^2)^2(3y)^2-4(2x^2)(3y)^3+(3y)^4=$

$=16x^8-96x^6y+216x^4y^2-216x^2y^3+81y^4$

11. a) Halla el término número 17 del desarrollo de $\left(3x - \frac{1}{3}y\right)$

b) El término 14º de $(x^3 - y^3)^{18}$

a) $\binom{21}{16}\cdot(3x)^5\left(-\frac{1}{3}y\right)^{16} = \frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot3^5x^5\cdot\frac{1}{3^{16}}y^{16} =$

$= \frac{2\,261}{19\,683}x^5y^{16}$

b) $\binom{18}{13}\cdot(x^2)^5(-y^3)^{13} = -\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot x^{10}y^{39} =$

$= -8\,568x^{10}y^{39}$

12. Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{1} = 2^n$

(Sugerencia: Calcula $(1+1)^n$)

La sugerencia dada hace que el resultado sea inmediato, pues:

$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}\cdot1^n + \binom{n}{1}\cdot1^{n-1}\cdot1 + \binom{n}{2}\cdot1^{n-2}\cdot1 + \ldots +$

$+ \binom{n}{n-1}1\cdot1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n =$

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

13. Aplicando el resultado del problema anterior halla la suma: $C_{8,0} + C_{8,1} + C_{8,2} + C_{8,3} + C_{8,4} + C_{8,5} + C_{8,6} + C_{8,7} + C_{8,8}$.

Como

$C_{8,0} + C_{8,1} + C_{8,2} + C_{8,3} + C_{8,4} + C_{8,5} + C_{8,6} + C_{8,7} + C_{8,8} =$

$= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \ldots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$

14. ¿Cuántos subconjuntos diferentes tiene el conjunto *L* = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*}? Nota: Debes incluir el conjunto vacío (∅) y el conjunto total (*L*).

Hay 1 subconjunto con cero elementos, el conjunto vacío: ϕ.
Hay 6 subconjuntos con un elemento: {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*}, {*e*} y {*f*}. Este número coincide con las combinaciones de 6 elementos tomados 1 a 1: $C_{6,1}$.
Los subconjuntos con dos elementos son: {*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*a*, *d*}, …, que son las combinaciones de 6 elementos tomados 2 a 2: $C_{6,2}$.
Los subconjuntos con tres elementos son: {*a*, *b*, *c*}, {*a*, *b*, *d*}, {*a*, *b*, *e*}, …, que son las combinaciones de 6 elementos tomados 3 a 3: $C_{6,3}$.
Los subconjuntos con cuatro elementos son: {*a*, *b*, *c*, *d*}, {*a*, *b*, *c*, *e*}, …, las combinaciones de 6 elementos tomados 4 a 4: $C_{6,4}$.
Los subconjuntos con cinco elementos son: {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}, {*a*, *b*, *c*, *d*, *f*}, …, las combinaciones de 6 elementos tomados 5 a 5: $C_{6,5}$.
Los subconjuntos con seis elementos son $C_{6,6}$, que sólo hay uno, el conjunto dado.

Así, pues, en total hay: $1 + 6_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$
$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

Este resultado se generaliza fácilmente aplicando el resultado del problema propuesto 12. En general, un conjunto con *n* elementos tiene un total de 2^n subconjuntos.

Tipo III. Problemas de variaciones, permutaciones y combinaciones.

15. ¿Cuántos equipos de baloncesto pueden formarse con 12 jugadores, sin importar el puesto que ocupen?

Un equipo de baloncesto está formado por cinco jugadores. Como no importa la posición, el total de equipos posibles es

$C_{12,7} = \binom{12}{5} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 792$

16. Entre las variaciones ordinarias de los números del 1 al 9, tomados 4 a 4, ¿cuántas de ellas hay en las que las dos primeras cifras sean pares y la dos últimas impares?

Entre el 1 y el 9 hay 4 pares y 5 impares.
Las dos primeras cifras se pueden tomar de $V_{4,2}$.
Las dos últimas cifras se pueden tomar de $V_{5,2}$.
En total tendremos: $V_{4,2}\cdot V_{5,2} = 12\cdot20 = 240$.

17. Un número es capicúa cuando se lee lo mismo a derechas que a izquierdas. Por ejemplo 261 162 es un número capicúa de seis cifras. Contesta:
a) ¿Cuántos números de 6 cifras son capicúas?
b) ¿Cuántos de esos capicúas comienzan por 17?

a) Dadas las tres cifras iniciales, por ejemplo 261, sólo existe otra colación de números que hace capicúa al de 6 cifras; para este ejemplo, la terna 162.
Como hay 1 000 números de 3 cifras ($VR_{10,3} = 10^3 = 1\,000$), ese será el número de capicúas de 6 cifras.

b) Fijadas las dos primeras cifras (17) sólo hay 10 dígitos que completan la tercera cifra, 170 _ _ _, 171 _ _ _ , …, 179_ _ _. Por tanto, hay 10 números capicúas de 6 cifras que empiecen por 17.

18. Supongamos que *a, b, c, d, e, f, g* y *h* designan 7 números distintos de 0. Si cuatro de esos números son positivos y tres son negativos:
a) ¿Cuántos productos de cuatro factores distintos pueden formarse?
b) ¿Cuántos de ellos serán negativos?

Como el orden de los factores no altera el producto (propiedad conmutativa) se trata de un problema de combinaciones.

a) Número de productos distintos:

$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

b) El producto es negativo cuando un factor es negativo y los otros tres positivos; o cuando tres factores son negativos y el otro positivo.
Con un factor negativo:
El factor negativo puede ser cualquiera de los tres que hay; los tres positivos se pueden tomar de $C_{4,3}$ maneras distintas. Luego, con un factor negativo hay $3\cdot C_{4,3} = 3\cdot4 = 12$ productos distintos.

Con tres factores negativos:
Los tres factores negativos sólo pueden tomarse de una forma; el factor positivo puede ser cualquiera de los cuatro que hay. En total: $1 \cdot 4 = 4$
Por tanto habrá $12 + 4 = 16$ producto negativos.

19. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 per— sonas en un banco alargado? ¿Y en una mesa redonda?

En un banco alargado de P_6 mareas diferentes: $P_6 = 720$.
En una mesa redonda es independiente la posición del primero en sentarse; luego hay $P_5 = 120$ maneras

20. ¿De cuántas formas distintas pueden meterse 65 llaves en una anilla?

Es como la mesa redonda: $P_5 = 120$.

21. ¿Cuantas palabras de cuatro letras distintas pueden formarse con las letras de la palabra:
a) CARMEN; b) PERMUTACIÓN; c) FACUNDO;

a) $V_{6,\,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b) $V_{11,\,4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7\,920$
c) $V_{7,\,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

22. Para cada caso, ¿cuantas de las palabras anteriores acaban en vocal?

a) De las 6 posibles terminaciones, dos son vocales; por tanto en vocal terminan: $\frac{2}{6} \cdot 360 = 120$.
b) De las 11 posibles terminaciones, cinco son vocales; por tanto en vocal terminan: $\frac{5}{11} \cdot 7\,920 = 3\,600$.
c) De las 7 posibles terminaciones, 3 son vocales; por tanto en vocal terminan: $\frac{3}{7} \cdot 840 = 360$.

23. De cuántas maneras diferentes pueden permutarse las letras de las palabras:
a) EUFRASIO b) JARRA c) ZOOLÓGICO
d) ALELUYA

a) $P_8 = 40\,320$
b) Hay 5 letras de las cuales están repetidas A y R. Por tanto, el número de permutaciones será:
$$P_5^{2,2,1} = \frac{P_5}{P_2 P_2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$
c) Hay 9 letras, con O repetida 4 veces. Por tanto, el número de permutaciones será:
$$P_9^{4,1,1,1,1,1} = \frac{P_9}{P_4} = \frac{9!}{4!} = 15\,120$$
d) Hay 7 letras de las cuales están repetidas A y L. Por tanto, el número de permutaciones será:
$$P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{P_7}{P_2 P_2} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1\,260$$

24. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 25 y 50 gramos, ¿cuántas pesadas diferentes pueden hacerse?

El número de pesadas distintas coincide con el número de subconjuntos que pueden formarse con las pesas que tenemos: subconjuntos con una pesa, con dos pesas, con tres pesas, …
En todos los caso serían combinaciones de 6 pesas tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, …, 6 a 6. Esto es:
$$C_{6,\,1} + C_{6,\,2} + C_{6,\,3} + C_{6,\,4} + C_{6,\,5} + C_{6,\,6} =$$
$$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

Nota: Como sabemos por el problema 12 el número de subconjuntos de un conjunto de 6 elementos es 2^6, al tratarse de pesar hay que descartar el de peso 0 g, el conjunto vacío. Por tanto serán $2^6 - 1$.

25. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se forman números de 1 a 6 cifras.
a) ¿Cuántos de ellos serán múltiplos de 2?
b) ¿Cuántos de ellos serán múltiplos de 5 y no tengan ninguna cifra repetida?

a) En este caso, los números de menos de seis cifras pueden incluirse con los de 6 cifras, pues, por ejemplo, $344 = 000344$ o $5\,200 = 005\,200$.
En total habrá $VR_{7,\,6} = 7^6 = 117\,649$
Son múltiplos de 2 los que terminan en 0, 2, 4, o 6 que son $\frac{4}{7} \cdot 117\,649 = 67\,228$
b) Sin repetir cifras hay:
$V_{7,\,1} + V_{7,\,2} + V_{7,\,3} + V_{7,\,4} + V_{7,\,5} + V_{7,\,6} = 7 + 42 + 210 + 840 + 2\,520 + 5\,040 = 8\,659$
De ellos son múltiplos de 5 los que terminan en 0 o en 5, que son: $\frac{2}{7} \cdot 8\,659 = 2\,474$

26. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse una quiniela de 14 partidos?

Cada partido puede tener 3 resultados: en la quiniela se indican con 1, X, 2.
Los resultados pueden repetirse, pudiendo darse, por ejemplo, la secuencia 1 X 2 X X X 1 1 1 2 X 1 1 1.
Su número será variaciones de 3 elementos tomados 14 a 14: $VR_{3,\,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$.

27. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

Las diagonales de cualquier polígono son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Por tanto, cada dos vértices determinan una diagonal o un lado.
El número de segmentos que determinan los 10 vértices del decágono son $C_{10,\,2}$. Como 10 de ellos son los lados, el resto serán diagonales.

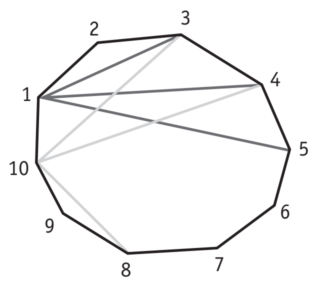


Fig. 6.1.

Por tanto, el número de diagonales de un decágono son:
$$C_{10,\,2} - 10 = \frac{10 \cdot 9}{2} - 10 = 35$$

28. Tenemos una baraja española de 40 cartas, y las repartimos en grupos de 5 en 5.
a) ¿Cuántos grupos de cinco cartas pueden formarse?
b) ¿En cuántos de esos grupos no habrá ningún rey?
c) ¿En cuantos de esos grupos no habrá ninguna copa?
d) ¿En cuántos de esos grupos habrá al menos una figura?

a) El orden en el que se reciben las cartas no importa; lo único que cambia una jugada es que alguna de las cartas sea distinta. Se trata, pues de un problema de combinaciones de 40 cartas tomadas 5 a 5.
Su número será: $C_{40,\,5}=\binom{40}{5}=\dfrac{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=658\,008$

b) En una baraja hay 4 reyes. El los grupos de 5 cartas no habrá ningún rey si se quitan los 4 reyes a la hora de repartir; se repartirán, por tanto, 36 cartas tomadas 5 a 5.
Su número será: $C_{36,\,5}=\binom{36}{5}=\dfrac{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=376\,992$

c) En la baraja hay 10 copas. En los grupos de 5 cartas no habrá copas cuando se reparten las 30 cartas que son copas.
Su número será: $C_{30,\,5}=\binom{30}{5}=\dfrac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=142\,506$

d) En la baraja hay 12 figuras. Habrá $C_{28,\,5}$ grupos en los que no haya figuras; en todos los restantes habrá alguna figura.
Su número será:
$C_{40,\,5}-C_{28,\,5}=\binom{40}{5}-\binom{28}{5}=658\,008=\dfrac{28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24}{120}=$
$658\,008-98\,280=559\,728$

29. a) ¿Cuantos códigos de 6 letras pueden formarse sin repetir ninguna de las 27 letras del abecedario?.
b) ¿Cuántos de estos códigos tienen tres vocales distintas?

a) Se trata de rellenar seis casillas con 27 letras.

En la primera casilla puede escribirse cualquiera de las 27 letras iniciales; para la segunda, al no poder repetir, tenemos 26 posibilidades; para la 3º, 25; para la 4ª, 24; 23, para la 5ª; y 22, para la 6ª letra.
En total, 27 · 26 · 25 · 24 · 23 · 22 = 213127200 códigos distintos.
Nota: se podría hacer más rápido, diciendo que su número es $V_{27,6}$.

b) Hay que elegir tres casillas, entre las 6 que tenemos, para las vocales. Estas casillas pueden elegirse de $C_{6,3}$ maneras distintas; por ejemplo

a			*e*		*u*

En esas 3 casillas, las vocales pueden ponerse de $V_{5,3}$ formas diferentes: hay 5 vocales, de las que se eligen 3).
Las otras tres casillas se rellenarán con 3 de las 22 letras restantes: de $V_{23,3}$ maneras distintas.
En definitiva, tendremos
$C_{6,\,3}\cdot V_{5,\,3}\cdot V_{22,\,3}=\binom{6}{3}\cdot(5\cdot4\cdot3)\cdot(22\cdot21\cdot20)=11\,088\,000$

30. ¿Cuántos resultados distintos pueden darse al tirar dos dados numerados del 1 al 6? ¿Y al tirar tres dados?

Con cada dado se tiene 6 resultados posibles. Por tanto:
Con dos dados habrá $6\cdot6=36$ resultados
Con 3 dados habrá $6\cdot6\cdot6=216$ resultados.
Nota: Habitualmente los dados, aun en el supuesto de que sean idénticos, se consideran distinguibles. Así, el resultado 5, 2, 1 se puede dar de seis maneras distintas: 521, 512, 251, 215, 152 y 125, que son las permutaciones de tres.

31. Al tirar tres dados numerados del 1 al 6, la suma de sus resultados varía entre 3 y 18. ¿En cuántos casos la suma será 8? ¿Cuántos casos hay que sumen 11 o 12?
(Sugerencia: Puedes hacerlo a mano, tanteando; pero busca una solución con criterios combinatorios.)

La suma 8 se da con los resultados:
6 1 1 → y también 1 6 1 y 1 1 6
5 2 1 → y también 5 1 2, 2 5 1, 2 1 5, 1 5 2 y 1 2 5
4 3 1 → Estos tres números generan un total de 6 casos ($P_3=6$)
4 2 2 → Estos tres números generan un total de 3 casos ($P_3^{2,1}=3$)
3 3 2 → Estos tres números generan otros 3 casos ($P_3^{2,1}=3$)
Por tanto, la suma 8 se da en $3+6+6+3+3=21$ ocasiones.
La suma 11 se da con los resultados:
6 4 1 → que generan un total de 6 casos: $P_3=6$.
6 3 2 → que generan 6 casos
5 5 1 → que generan 3 casos
5 4 2 → que generan 6 casos.
5 3 3 → que generan 3 casos
4 4 3 → que generan 3 casos.
Por tanto, la suma 11 puede darse en 27 ocasiones.
La suma 12 se da con los resultados:
6 5 1 → que generan un total de 6 casos: $P_3=6$.
6 4 2 → que generan 6 casos
6 3 3 → que generan 3 casos
5 5 2 → que generan 3 casos.
5 4 3 → que generan 6 casos
4 4 4 → que generan 1 caso.
Por tanto, la suma 12 puede darse en 25 ocasiones.

32. a) ¿Cuántos números de 4 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?
b) ¿Cuántos de ellos empiezan por 6?
c) Si los ordenamos de menor a mayor, ¿qué lugar ocuparía el número 6 321?
d) ¿Cuántos de ellos terminan en 1; en 2; en 3; o tienen el número 7 en la posición de las centenas; o de los millares?
e) ¿Cuánto suman todos esos números de 4 cifras?

a) Como no hay repetición, se trata de variaciones ordinarias.
Su número será:
$V_{7,\,4}=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$.

b) Uno de cada siete número empezará por 6; esto es, $840:7=120$.

c) El número 6 321 es mayor que todos los que empiezan por 1, 2, 3, 4 y 5. Por 1 empiezan 120 números, y los mismos por 2, 3, 4 o 5; en total, 600.

Por 61 _ _ comienzan $5 \cdot 4 = 20$ números; otros tantos, por 62 _ _ . El último de estos es 6 275; y le siguen 6 312, 6 314, 6 315, 6 317 y 6 321.

Por tanto, por delante de 6 321 hay $600 + 20 + 20 + 4 = 644$. Luego, 6 321 ocupa la posición 645ª.

d) En todos los casos la respuesta es la misma:
$840 : 7 = 120$.

e) Se trata de hacer una suma de 840 sumandos. Así:
$1\,234 + 1\,235 + \ldots + 2\,734 + 2\,735 + \ldots + 7\,653 + 7\,654$
Como en cada posición (unidades por ejemplo) cada dígito está repetido 120 veces, la suma de cada columna será:
$1 \cdot 120 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 120 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 120 + 6 \cdot 120 + 7 \cdot 120 = 3\,360$
La columna de las unidades suma 3 360 unidades
La columna de las decenas suma 3 360 decenas = 33 600 unidades
La columna de las centenas suma 3 360 centenas = 336 000 unidades
La columna de las unidades de millar suma 3 360 millares = 3 360 000 unidades.
La suma total será:

$$\begin{array}{r} 3\,360 \\ 33\,600 \\ 336\,000 \\ 3\,360\,000 \\ \hline 3\,732\,960 \end{array}$$

33. ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité compuesto por 2 hombres y 3 mujeres, de un grupo de 8 hombres y 12 mujeres.

Los dos hombres se pueden elegir de $C_{8,\,2}$ maneras distintas; las tres mujeres de $C_{12,\,3}$ formas distintas. Luego, el número de comités posibles será: $C_{8,\,2} \cdot C_{12,\,3} = 28 \cdot 220 = 6\,160$.

34. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 rumanos, 2 polacos y 5 españoles, de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

Las opciones para el ordenamiento de las nacionalidades son P_3. Por ejemplo, una de ellas sería (ESP) (POL) (RUM).
En cada opción, los 5 españoles se pueden intercambiar entre ellos de P_5 maneras diferentes; los dos polacos de P_2 formas distintas; y los 3 rumanos de P_3 formas diferentes.
El número total de posibilidades es: $P_3 \cdot P_5 \cdot P_2 \cdot P_3 = 8\,640$.

35. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en una estantería 5 libros grandes, 4 medianos y 6 pequeños (todos distintos), de modo que los de cada tamaño siempre estén juntos?

Es un problema similar al anterior.
Su número será: $P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_6 = 12\,441\,600$.

36. ¿Cuántos números hay de tres cifras? ¿Y de tres cifras no repetidas?

Los números 0, 12, 78, ..., pueden considerarse tres cifras escribiéndolos así: 000, 012, 078. Entonces, habrá 1 000 números: desde el 000 al 999.
También podemos decir que hay $VR_{10,\,3} = 10^3$. (Tomamos tres dígitos, entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).
Si no se repiten cifras, habrá $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

37. En la lotería primitiva una apuesta consiste en seleccionar 6 números elegidos entre el 1 y el 49, sin importar el orden de elección. ¿Cuántas apuestas distintas pueden hacerse en la lotería primitiva?

Como no importa el orden de elección de los 6 números, la apuesta 12, 23, 32, 35, 42 y 47 es la misma que la 47, 35, 12, 23, 42 y 35. Por tanto, el número de apuestas posibles es

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{3!(49-6)} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

38. En la Liga Nacional de Fútbol hay 18 equipos en primera división. ¿Cuántos partidos se juegan en cada liga? (Recuerda que cada equipo juega contra los demás dos partidos, uno en casa y otro fuera).

Cada partido lo juegan 2 de los 18 equipos de primera división.
Como, por ejemplo, el partido Real Madrid-Barcelona es distinto del Barcelona-Real Madrid, importan el orden en que se tomen. Por tanto se trata de un problema de variaciones.
El número total de partidos será $V_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$.

39. Una persona desea ir desde el punto *A*(0, 0) al punto *B*(6, 5), siguiendo siempre las líneas de la retícula y sin alejarse de su objetivo? (La retícula pueden ser calles de una ciudad que tiene un trazado rectángula). En el dibujo hemos trazado dos posibles rutas.) ¿De cuantas maneras podrá hacerlo?

Sugerencia: Empieza por un problema más fácil; por ejemplo, cuando esa persona desea trasladarse desde el punto *A*(0, 0) hasta el punto *C*((2, 2) o hasta el punto *D*(3, 3). También puedes proceder estudiando cuántas rutas distintas hay desde los puntos *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* … hasta *B*.

El problema puede plantearse como sigue: Para ir de *A* hasta *B* hay que recorrer 11 tramos unitarios; de ellos, 6 son horizontales (hacia el este, *E*) y 5 son verticales (hacia el norte, *N*). Así, una posible ruta sería *EENNENEEENN*, que es la marcada en rojo en la figura.

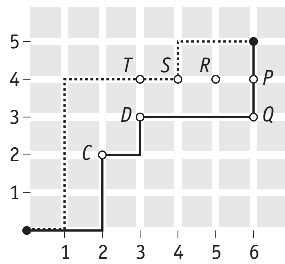


Fig. 6.2.

Por tanto se trata de elegir los cinco movimientos hacia el norte entre los 11 que hay que hacer.

$$\text{Su número es } C_{11,\,5} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

40. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila 6 chicos y 4 chicas de forma que no haya dos chicas juntas?

Designamos las chicas mediante letras y los chicos por números. Una de las posiciones básicas posibles es:

1	A	2	3	C	5	D	6	B	4

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

Fig. 6.3.

La primera chica deja a su izquierda x_1 posiciones, con $x_1 \geqslant 0$
Entre la primera y la segunda chica habrá x_2 espacios, con $x_2 \geqslant 1$
Entre la segunda y la tercera chica habrá x_3 espacios, con $x_3 \geqslant 1$
Entre la tercera y cuarta chica habrá x_4 espacios, con $x_4 \geqslant 1$
Detrás de la cuarta chica habrá x_5 espacios, con $x_5 \geqslant 0$
Debe cumplirse que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$,
con $x_1 \geqslant 0$, x_2, x_3, $x_4 \geqslant 1$, $x_5 \geqslant 0$, y todos los valores enteros.
Esta ecuación es equivalente a:
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 8$,
con $y_1 = x_1 + 1 \geqslant 0$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_4 \geqslant 1$, $y_5 = x_5 + 1 \geqslant 0$.
Cuyas soluciones son $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 35$
Veamos este resultado.
Observa que: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$
Esa suma se descompone en cinco sumandos mayores o iguales que 1 cada vez que se eligen cuatro signos +, por ejemplo:
$(1) + (1 + 1) + (1 + 1) + (1) + (1 + 1) = 8$;
o bien $(1 + 1) + (1 + 1 + 1) + (1) + (1) + (1) = 8$
Que generan las soluciones:
$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 2, y_4 = 1, y_5 = 2; y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 1, y_4 = 1, y_5 = 1$.
La elección de 4 signos + entre los siete que hay puede hacerse de $\binom{7}{4}$ maneras distintas.
Con esto, se determina que hay 35 posiciones básicas; pero, por cada una de estas posiciones, las 4 chicas puede ponerse de 4! formas distintas, y los chicos de 6! maneras distintas.
Por el número total será: $35 \cdot 4! \cdot 6! = 604\,800$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. **¿Cómo se define el factorial de un número? ¿Cuánto vale 6!?**

   720

2. **¿Cuánto vale $\binom{14}{12}$?**

   91

3. **Si no se permiten repeticiones, ¿cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los seis dígitos 4, 5, 6, 7, 8 y 9? ¿Cuántos de ellos son mayores de 800?**

   $V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$

   Los mayores de 800 serán: $2 \cdot V_{5,2} = 40$

4. **Escribe las variaciones y las combinaciones de las letras *A*, *B*, *C* y *D*, tomadas dos a dos?**

   Variaciones: AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.
   Combinaciones: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

5. **Escribe las permutaciones de los números 1, 2 y 3.**

   123 132 213 231 312 321

6. **En una carrera intervienen 10 caballos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar a la línea de meta los tres primeros? Indica la solución correcta:**
   a) $V_{10,\,3}$ b) $C_{10,\,3}$ c) P_{10}

   a) $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

7. **El profesor de Literatura pide leer 3 libros de una lista de 7. ¿Cuántos grupos de libros diferentes pueden leerse?**
   a) 7 b) 35
   c) 42 d) 210

   b) $35 = C_{7,3}$

8. **En una fiesta coinciden 6 chicos y 8 chicas. Si bailan todos con todas, ¿cuántas parejas distintas de baile se han formado?**

   $48 = 6 \cdot 8$

9. **¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas en una fila de 5 butacas?**

   $P_5 = 5! = 120$

10. **Aplicando la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio, calcula $(1 + x)^4$**

    $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

2 cuestiones para investigar

1. **Desde hace muchos años se organizan Olimpiadas Matemáticas, en las que participan alumnos de segundo de bachillerato. La competición deportiva consiste en resolver problemas con cierta dificultad, que suele vencerse mediante alguna idea feliz. Veamos uno de estos problemas propuesto en la Primera Fase de la XXI Olimpiada Matemática. Dice así:**
   Sea *n* un número natural cualquiera. Demostrar que para todo *k* natural y menor o igual que *n*, la expresión $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \ldots \cdot (2n - 1)(2n)$ es divisible por 2^k
   ***Sugerencia:* Piensa en la relación de (2n)! con la expresión.**

   Se trata de demostrar que en el producto
   $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \ldots \cdot (2n - 1)(2n)$
   aparece n veces el factor 2; esto es, que
   $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \ldots \cdot (2n - 1)(2n) = p \cdot 2^n$
   Tras darle vueltas –aquí está la primera idea feliz– se observa que:
   $$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$$
   O lo que es lo mismo, igual a
   $$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-2)(2n-1)(2n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)n}$$

Ahora –esta es la segunda idea feliz–, escribimos los factores pares del numerador como producto. Así:

$$\frac{1\cdot(1\cdot 2)\cdot 3\cdot(2\cdot 2)\cdot 5\cdot(3\cdot 2)\cdot 7\cdot(4\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2n-3)((n-1)\cdot 2)(2n-1)(n\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)n}$$

Fíjate ahora en los primeros factores de cada paréntesis del numerador. Te darás cuenta que son 1, 2, 3, ..., n; luego pueden simplificarse con cada uno de los factores del denominador.
Por tanto, la expresión anterior vale
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot 2\cdot(2n-1)\cdot 2 =$
$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\cdot 2^n$
pues el factor se repite n veces.
Así pues,
$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)(2n) =$
$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\cdot 2^n$
es divisible por $2k$ para cualquier k natural menor o igual que n.

2. El sistema braille, inventado en el siglo XIX, está basado en un símbolo formado por 6 puntos: aquellos que estén en relieve representarán una letra o signo de la escritura en caracteres visuales. El tamaño y distribución de los 6 puntos que forman el llamado Signo Generador, no es un capricho sino el fruto de la experiencia de Louis Braille. Las terminaciones nerviosas de la yema del dedo están capacitadas para captar este tamaño en particular.
El signo generador permite representar letras, números, signos de puntuación, expresiones matemáticas, etc.

Investiga sobre el tema en:
http://usuarios.discapnet.es/ojo_oido/sistemabraille.htm
http://fbraille.com.uy/alfabeto/

Actividades

1. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α del segundo cuadrante, si sen $\alpha=\frac{4}{5}$.

De $\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1$ se obtiene

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=$$

$=\pm\frac{3}{5}$. Como α está en el tercer cuadrante, su coseno es negativo. Luego la solución válida es $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Por tanto, $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4/5}{-3/5}=-\dfrac{4}{3}$.

2. Si cos 24º = 0,91, determina, sin utilizar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: a) 114º , b) 156º, c) 204º, d) 336º.

$\text{sen}\,24^\circ=\sqrt{1-\cos^2 24^\circ}=\sqrt{1-(0{,}91)^2}\approx 0{,}41$.

Además, $\text{tg}\,24^\circ=\dfrac{\text{sen}\,24^\circ}{\cos 24^\circ}=\dfrac{0{,}41}{0{,}91}\approx 0{,}45$

a) Como $114^\circ=90^\circ+24^\circ$ será:
$\text{sen}\,114^\circ=\cos 24^\circ=0{,}91$
$\cos 114^\circ=-\text{sen}\,24^\circ=-0{,}41$
$\text{tg}\,114^\circ=-\text{cotg}\,24^\circ=-2{,}22$.

b) Como $156^\circ=180^\circ-24^\circ$ será:
$\text{sen}\,156^\circ=\text{sen}\,24^\circ=0{,}41$
$\cos 156^\circ=-\cos 24^\circ=-0{,}91$
$\text{tg}\,156^\circ=-\text{tg}\,24^\circ=-0{,}45$.

c) Como $204^\circ=180^\circ+24^\circ$ será:
$\text{sen}\,204^\circ=-\text{sen}\,24^\circ=-0{,}41$
$\cos 204^\circ=-\cos 24^\circ=-0{,}91$
$\text{tg}\,204^\circ=\text{tg}\,24^\circ=0{,}45$.

d) Como $336^\circ=360^\circ-24^\circ$ será:
$\text{sen}\,336^\circ=-\text{sen}\,24^\circ=-0{,}41$
$\cos 336^\circ=\cos 24^\circ=0{,}91$
$\text{tg}\,336^\circ=-\text{tg}\,24^\circ=-0{,}45$.

3. Si $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ($\alpha\in$ I cuadrante) y $\text{tg}\,\beta=-2$ ($\beta\in$ II cuadrante), calcula sin utilizar la calculadora, el valor de $\text{sen}(\alpha+\beta)$ y $\text{tg}\,(\alpha-\beta)$.

$\text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ (elegimos el signo positivo de la raíz cuadrada pues α es un ángulo del primer cuadrante). Además, $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

De la relación $1+\text{tg}^2\,\beta=\sec^2\beta$ deducimos que

$\cos^2\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (con signo menos pues está en el segundo cuadrante):

también $\text{sen}\,\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (elegimos el signo positivo de la raíz cuadrada pues β es del segundo cuadrante).

Sustituimos estos valores y obtenemos:

$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta=$

$$\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\,\beta-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\beta\cdot\text{tg}\,\alpha}=\frac{-2-\frac{4}{3}}{1+(-2)\cdot\frac{4}{3}}=2$$

4. Si $\text{sen}\,\alpha=-\frac{1}{5}\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$, determina sin calculadora, el valor de sen 2α y $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Empezamos calculando el valor de $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Aplicando la fórmula del seno del ángulo doble será:

$$\text{sen}\,2\alpha=2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{25}$$

Y aplicando la fórmula del coseno del ángulo mitad será:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}$$

elegimos el signo $-$ pues el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ está en el segundo cuadrante).

5. Calcula el valor de la expresión $\dfrac{\text{sen}\,70^\circ+\text{sen}\,50^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 50^\circ}$.

Utilizando las fórmulas de transformación se tiene:

$$\frac{\text{sen}\,70^\circ+\text{sen}\,50^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 50^\circ}=$$

$$=\frac{2\text{sen}\,\frac{70^\circ+50^\circ}{2}\,\text{sen}\,\frac{70^\circ-50^\circ}{2}}{-2\text{sen}\,\frac{70^\circ+50^\circ}{2}\,\text{sen}\,\frac{70^\circ-50^\circ}{2}}=\frac{2\text{sen}\,60^\circ\cos 10^\circ}{-2\text{sen}\,60^\circ\,\text{sen}\,10^\circ}=$$

$=-\,\text{cotg}\,10^\circ$

6. Comprueba la identidad $\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\text{tg}\,\alpha$.

$$\frac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

7. Resuelve la ecuación sen $2x$ = sen x.

$\text{sen}\,2x=\text{sen}\,x\Leftrightarrow 2\text{sen}\,x\cos x=\text{sen}\,x\Leftrightarrow\text{sen}\,x(2\cos x-1)=0\Rightarrow$

$$\begin{cases}\text{sen}\,x=0\\ 2\cos x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sen}\,x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0^\circ+k\cdot 180^\circ\\ x=60^\circ+k\cdot 360^\circ\\ x=300^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$$

las soluciones del primer giro son 0º, 60º, 180º y 300º.

Problemas propuestos

Tipo I. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

1. Si $\operatorname{cosec}\alpha=-\frac{5}{2}$ y α es del cuarto cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{2}{5}$. $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$ (elegimos el signo + pues el ángulo está en el cuarto cuadrante).

$\Rightarrow \sec\alpha=\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{21}}{21}$.

Y $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\operatorname{cotg}\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

2. Si $\alpha=-0{,}76$ y α es del segundo cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{-0{,}76}=-1{,}315789474$.

$\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(-0{,}76)^2}=0{,}649923072$

(elegimos el signo + pues el ángulo es del segundo cuadrante) $\Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha=1{,}538643637$.

Por último, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{0{,}6499...}{-0{,}76}=-0{,}855161936$;

$\operatorname{cotg}\alpha=-1{,}169369165$.

3. De un ángulo α del primer cuadrante se conoce que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$. Calcula el valor exacto de:

a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $\operatorname{sen}(2\alpha)$

a) $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{8}}{3}$

(elegimos el signo + pues α es del primer cuadrante). Por tanto, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1/3}{\sqrt{8}/3}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{8}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4. Si $\operatorname{cotg}\alpha=-2$ y $\operatorname{sen}\beta=4\cos\beta$ calcula:
a) $\operatorname{tg}2\alpha$ b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

Si $\operatorname{cotg}\alpha=-2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Si $\operatorname{sen}\beta=4\cos\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\beta=4$. Luego:

a) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$

b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{1}{2}-4}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4}=\frac{9}{2}$

5. Calcula las razones del ángulo $\alpha+\beta$ sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{4}$, con $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, y $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

Si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{4}$, al ser α del primer cuadrante, será $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$ y $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Si $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, al ser β del segundo cuadrante, será $\operatorname{sen}\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\operatorname{tg}\beta=-2\sqrt{2}$. Luego $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{-1+\sqrt{120}}{12}$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}$ y

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{15}-\sqrt{8}}{1-\frac{\sqrt{15}}{15}\cdot(\sqrt{-8})}=\frac{\sqrt{15}-15\sqrt{8}}{15+\sqrt{120}}$

6. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$, calcula:

a) $\operatorname{sen}2\alpha$ b) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos(\pi+\alpha)$ d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

Si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$, y α del segundo cuadrante, será $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. Luego,

a) $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

b) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$

(elegimos el signo + pues $\frac{\alpha}{2}$ está en el primer cuadrante),

c) $\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha=$

$=-1\cdot\cos\alpha-0\cdot\operatorname{sen}\alpha=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\pi\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{1+0}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

7. Sin utilizar calculadora, determina el valor numérico de la expresión: $\frac{2}{5}$sen 330º $-\frac{1}{4}$tg 135º + 2cos 270º $-\frac{1}{6}$tg 240º.

Dado que sen 330º = − sen 30º = $-\frac{1}{2}$; tg 135º = −tg 45º = −1; cos 270º = 0 y que tg 240º = tg 60º = $\sqrt{3}$, la expresión dada $\frac{2}{5}$sen 330º $-\frac{1}{4}$tg 135º + 2cos 270º $-\frac{1}{6}$tg 240º vale

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\cdot(-1)+2\cdot 0-\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{3})=$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3-10\sqrt{3}}{60}$$

8. Calcula el valor numérico de las expresiones:
a) cos 195º − cos 75º
b) $\frac{\text{sen } 40º+\text{sen } 20º}{\cos 40º+\cos 20º}$

a) $\cos 195º-\cos 75º=-2\text{sen}\frac{195º+75º}{2}\text{sen}\frac{195º-75º}{2}=$

$-2\text{sen } 135º \text{ sen } 60º==-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$

b) $$\frac{\text{sen } 40º+\text{sen } 20º}{\cos 40º+\cos 20º}=\frac{2\text{sen}\frac{40º+20º}{2}\cos\frac{40º-20º}{2}}{2\cos\frac{40º+20º}{2}\cos\frac{40º-20º}{2}}=$$

$$=\frac{2\text{sen } 30º\cos 10º}{2\cos 30º\cos 10º}=\text{tg } 30º=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tipo II. Identidades. Fórmulas de adición y transformación

9. Demuestra que:
a) cos (α+β)· cos (α−β)=cos² α− sen² β
b) cos (α+β)· cos (α−β)=cos² β− sen² α

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=$
$=(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)=$
$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha\,(1-\text{sen}^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta-\text{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

b) Para demostrar la segunda igualdad, en $\underset{(*)}{=}$ hacemos

$\underset{(*)}{=}(1-\text{sen}^2\alpha)\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha(1-\text{sen}^2\beta)=$
$=\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha$

10. Comprueba las siguientes identidades:
a) $\text{cotg }\alpha-\frac{\text{cotg}^2\alpha-1}{\text{cotg }\alpha}=\text{tg }\alpha$
b) $\frac{\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

b) $$\text{cotg }\alpha-=\frac{\text{cotg}^2\alpha-1}{\text{cotg }\alpha}=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}-1}{\frac{1}{\text{tg }\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}}{\frac{1}{\text{tg }\alpha}}=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg }\alpha}=\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg }\alpha}=\text{tg }\alpha$$

b) $\frac{\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=$ (dividimos por $\cos^2\alpha$ en el numerador y denominador) $\frac{\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

11. Comprueba la identidad:
$\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot\cos 2\alpha=1+\text{sen } 2\alpha$.

Desarrollamos el primer miembro: $\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot\cos 2\alpha=$

$=\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=$

$=\frac{(\text{sen }\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}=$

$=(\text{sen }\alpha-\cos\alpha)^2=\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\text{sen }\alpha\cos\alpha=$
$=1+2\text{sen }\alpha\cos\alpha=1-\text{sen } 2\alpha$

12. Comprueba la identidad: $\frac{1-\text{tg }\alpha}{1+\text{tg }\alpha}=\frac{1-\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Operamos en el primer miembro: $\frac{1-\text{tg }\alpha}{1+\text{tg }\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}{\cos\alpha+\text{sen }\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\text{sen }\alpha)^2}{(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)(\cos\alpha-\text{sen }\alpha)}=$

$=\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-2\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{1-2\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=$

$=\frac{1-\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

13. Comprueba la identidad:
$2\cos\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha+\frac{1}{2}\text{sen } 2\alpha$.

Desarrollamos el primer miembro: $2\cos\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$

$=2\cos\alpha\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$=2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$=2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$$=2\cos\alpha\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\alpha\cdot\left(1+2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha\,(1+\text{sen}\,\alpha)=$$
$$=\cos\alpha+\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha=\cos\alpha+\frac{1}{2}\text{sen}\,2\alpha$$

14. Simplifica la expresión: $\dfrac{\text{sen}\,5\alpha-\text{sen}\,3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}$

$$\frac{\text{sen}\,5\alpha-\text{sen}\,3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{5\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\,\cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\cos 4\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{2\cos 4\alpha\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

15. ¿Es cierta la igualdad $\dfrac{\text{tg}\,\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\sec\alpha+\text{tg}\,\alpha$?

No es cierta, pues si desarrollamos el primer miembro:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=$$

$=\sec\alpha+\text{cotg}\,\alpha$ que, en general, es distinto que $\sec\alpha+\text{tg}\,\alpha$.

16. Expresa tg 3α en función de tg α.

$$\text{tg}\,3\alpha=\text{tg}\,(2\alpha-\alpha)=\frac{\text{tg}\,2\alpha-\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,2\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha}=\frac{\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}+\text{tg}\,\alpha}{1-\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}\text{tg}\,\alpha}=$$
$$=\frac{\frac{2\,\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\text{tg}^2\alpha-2\,\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}=\frac{3\,\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\,\text{tg}^2\alpha}$$

17. Expresa sen 4α en función de:
a) sen α; b) cos α.

a) $\cos 4\alpha=\cos 2(2\alpha)=\cos^2(2\alpha)-\text{sen}^2(2\alpha)=$
$=1-\text{sen}^2(2\alpha)-\text{sen}^2(2\alpha)=$
$=1-\text{sen}^2(2\alpha)=1-2(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2=$
$=1-8\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha=$
$=1-8\,\text{sen}^2\alpha\,(1-\text{sen}^2\alpha)=1-8\,\text{sen}^2\alpha+8\,\text{sen}^4\alpha$

b) En $=1-8(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha$

18. Expresa sen 4α en función de sen α y cos α.

$\text{sen}\,4\alpha=\text{sen}\,2(2\alpha)=2\,\text{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha)=$
$=2\cdot2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=$
$=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha(1-2\,\text{sen}^2\alpha)=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha-8\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha=$
También se puede poner en $=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)=$
$=8\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha-4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

19. Expresa sen *x*, cos *x* y tg *x* en función de tg $\frac{x}{2}$.

- $\text{tg}\,x=\text{tg}\left(2\frac{x}{2}\right)=\dfrac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}$
- Para expresar sen *x*, partimos de la relación $1+\text{cotg}^2x=\text{cosec}^2x\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\text{tg}^2x}=\dfrac{1}{\text{sen}^2x}\Leftrightarrow \text{sen}^2x=\dfrac{\text{tg}^2x}{1+\text{tg}^2x}$.
  Sustituyendo en esta expresión el valor obtenido para tg *x* resulta:
  $$\text{sen}^2x=\frac{\left(\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{4\,\text{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}\Rightarrow$$
  $$\text{sen}\,x=\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$
- Como $\cos x=\dfrac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x}$, resulta, sustituyendo las relaciones obtenidas anteriormente, que $\cos x=\dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Tipo III. Ecuaciones y sistemas trigonométricos

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\,\text{sen}\,2x=1$ **b) $3\,\text{tg}\,2x=\sqrt{3}$**

c) $3\cos\frac{x}{2}=1{,}5$ **d) $5\,\text{sen}\,4x=0$**

a) $2\,\text{sen}\,2x=1\Leftrightarrow\text{sen}\,2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$
$2x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot360^\circ\\150^\circ+k\cdot360^\circ\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{cases}15^\circ+k\cdot180^\circ\\75^\circ+k\cdot180^\circ\end{cases}$
Las soluciones del primer giro son: 15º, 75º, 195º y 255º.

b) $3\,\text{tg}\,2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\text{tg}2x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\cdot\pi}{2}$
las soluciones del primer giro son $\dfrac{\pi}{12}$ (para $k=0$), $\dfrac{7\pi}{12}$ (para $k=1$), $\dfrac{13\pi}{12}$ (para $k=2$) y $\dfrac{19\pi}{12}$ (para $k=3$).

c) $3\cos\dfrac{x}{2}=1{,}5\Leftrightarrow\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1{,}5}{3}=0{,}5\Rightarrow\dfrac{x}{2}=\begin{cases}60^\circ+k\cdot360^\circ\\300^\circ+k\cdot360^\circ\end{cases}\Rightarrow$
$x=\begin{cases}120^\circ+k\cdot720^\circ\\600^\circ+k\cdot720^\circ\end{cases}\Rightarrow$
Las soluciones *del primer giro de la variable* son: 120º y 600º.

d) $5 \text{ sen } 4x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 0 + k \cdot \frac{\pi}{4}$.
Las soluciones del primer giro son:
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\text{sen}(45° + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow x = \begin{cases} k \cdot 2\pi \\ \frac{10\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

Las soluciones del primer giro: 0 y $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\text{sen}(45° + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45° + x = \begin{cases} 225° + k \cdot 360° \\ 315° + k \cdot 360° \end{cases}$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 180° + k \cdot 360° \\ 270° + k \cdot 360° \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son 180° y 270°.

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \text{sen } 2x$

$\cos x = \text{sen } 2x \Leftrightarrow \cos x = 2 \text{ sen } x \cos x \Leftrightarrow \cos x \, (1 - 2 \text{ sen } x) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0\pi \\ 1 - 2\text{sen} x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 90° + k \cdot 180° \\ \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° \\ x = 150° + k \cdot 360° \end{cases} \end{cases} \quad (k \in Z).$

Las soluciones del primer giro son 90°, 270°, 30° y 150°.

23. Resuelve la ecuación: $\cos 3x + \text{sen } x = \cos x$

Teniendo en cuenta que $\cos 3x = \cos^3 x - 3\text{sen}^2 x \cos x$, la ecuación inicial se puede expresar así: $\cos 3x + \text{sen } x = \cos x$ $\Leftrightarrow \cos^3 x - 3\text{sen}^2 x \cos x + \text{sen } x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$
$\cos x \, (\cos^2 x - 3 \text{ sen}^2 x - 1) + \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow$
$\cos x \, (-4 \text{ sen}^2 x) + \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow$
$\text{sen } x \, (1 - 4\text{sen } x \cos x) = 0 \Leftrightarrow$
$\text{sen } x \, (1 - 2\text{sen } 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - 2\text{sen } 2x = 0 \end{cases}$

- Si $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0° + \text{k} \cdot 180°$.
- Si $1 - 2\text{sen } 2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } 2x$

$= \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30° + k \cdot 360° \\ 150° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15° + k \cdot 180° \\ 75° + k \cdot 180° \end{cases} \; (k \in Z)$

Las soluciones del primer giro son: 0°, 180°, 15°, 195°, 75° y 255°.

24. Resuelve la ecuación: $\text{tg } x = \sqrt{2} \cos x$

$\text{tg } x = \sqrt{2} \cos x \Leftrightarrow \text{sen } x = \sqrt{2} \cos^2 x \Leftrightarrow$
$\text{sen } x = \sqrt{2} \, (1 - \text{sen}^2 x)$ que da lugar a la ecuación de segundo grado en sen x, $\sqrt{2} \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$ cuyas soluciones son

$\text{sen } x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \text{ (imposible)} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 45° + k \cdot 360° \\ 135° + k \cdot 360° \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son 45° y 135°.

25. Resuelve la ecuación: $\text{tg } 2x = -\text{tg } x$

$\text{tg } 2x = -\text{ tg } x \Leftrightarrow \frac{2\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} - \text{tg } x \Leftrightarrow \text{tg}^3 x - 3\text{tg } x = 0$

$\Leftrightarrow \text{tg } x(\text{tg}^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = 0 \\ \text{tg}^2 x - 3 = 0 \end{cases}$

- Si $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0° + k \cdot 180°$
- Si $\text{tg}^2 x - 3 = 0$

$\Rightarrow \text{tg } x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si tg } x = +\sqrt{3} \Rightarrow \quad x = 60° + k \cdot 180° \\ \text{Si tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow \quad x = 120° + k \cdot 180° \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son: 0°, 180°, 60°, 240°, 120° y 300°.

26. Resuelve la ecuación: $\text{sen } 2x \cos x = 3 \text{ sen}^2 x$

$\text{sen } 2x \cos x = 3 \text{ sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x \cos x. \cos x = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x \cos^2 x = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x(1 - \text{sen}^2 x) = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x - 2\text{sen}^3 x - 3\text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x(2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x) = 0.$

- Si $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0° + \text{k} \cdot 180°$.
- Si $2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen } x - 2 = 0$ que es una ecuación de 2° grado cuyas soluciones son $\text{sen } x \Rightarrow = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$. La solución $\text{sen } x = -2$ no es posible. Si

$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30° + k \cdot 360° \\ 150° + k \cdot 360° \end{cases} \quad (k \in Z)$

Las soluciones del primer giro son 0°, 180°, 30° y 150°.

27. Resuelve la ecuación: $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$, ecuación de segundo grado en cos x,

cuya solución es $\cos x = \begin{cases} -1/2 \\ -2 \text{ (imposible)} \end{cases}$

$\Rightarrow x = \text{arc cos } (-1/2) = \begin{cases} 120° + k \cdot 360° \\ 240° + k \cdot 360° \end{cases} \Rightarrow (k \in Z)$

Las soluciones del primer giro son 120° y 240°.

28. Resuelve la ecuación: $\text{sen}(2x + 40°) + \text{sen}(x + 20°) = 0$.

$\text{sen}(2x + 40°) + \text{sen}(x + 20°) = 0$

$\Leftrightarrow 2\text{sen } \frac{3x + 60°}{2} \cos \frac{x + 20°}{2} = 0 \Rightarrow$

- Si $\text{sen } \frac{3x + 60°}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x + 60°}{2} = \begin{cases} 0° + k \cdot 360° \\ 180° + k \cdot 360° \end{cases}$

$\Rightarrow 3x + 60° = \begin{cases} 0° + k \cdot 720° \\ 360° + k \cdot 720° \end{cases} \Rightarrow 3x = \begin{cases} -60° + k \cdot 720° \\ 300° + k \cdot 720° \end{cases} \Rightarrow$

$$x=\begin{cases}-20^\circ+k\cdot 240^\circ\\100^\circ+k\cdot 240^\circ\end{cases}$$

- Si $\cos\dfrac{x+20^\circ}{2}=0\Rightarrow\dfrac{x+20^\circ}{2}=90^\circ+k\cdot 180^\circ$
  $\Rightarrow x+20^\circ=180^\circ k\cdot 360^\circ\Rightarrow x=160^\circ+k\cdot 360^\circ$
  Las soluciones del primer giro son 220º, 100º, 340º y 160º.

29. Resuelve la ecuación: $\cos 2x-\cos 6x=\operatorname{sen} 5x+\operatorname{sen} 3x$

La ecuación planteada es equivalente a

$$-2\operatorname{sen}\frac{2x+6x}{2}\operatorname{sen}\frac{2x-6x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}\Leftrightarrow$$

$\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen}(-2x)=\operatorname{sen} 4x\cos x\Leftrightarrow\operatorname{sen} 4x(\cos x-\operatorname{sen} 2x)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen} 4x=0\\\cos x-\operatorname{sen} 2x=0\end{cases}$$

- Si $\operatorname{sen} 4x=0\Rightarrow 4x=0^\circ+k\cdot 180^\circ\Rightarrow x=0^\circ+k\cdot 45^\circ$
- Si $\cos x-\operatorname{sen} 2x=0\Leftrightarrow\cos x-2\operatorname{sen} x\cos x=0\Leftrightarrow$ $\cos x(1-2\operatorname{sen} x)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\\\operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=90^\circ+k\cdot 180^\circ\\x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}\end{cases}\quad(k\in Z)$$

Las soluciones del primer giros son 0º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º, 30º y 150º.

30. Resuelve el sistema $\begin{cases}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=1\\x+y=90^\circ\end{cases}$

De la segunda ecuación, $x=90^\circ-y$. Sustituyendo en la primera, $\operatorname{sen}(90^\circ-y)+\operatorname{sen} y=1\Leftrightarrow\operatorname{sen} 90^\circ\cos y-\cos 90^\circ\operatorname{sen} y+\operatorname{sen} y=1\Leftrightarrow\cos y+\operatorname{sen} y=1$ cuyas soluciones son (está resuelta en los ejemplos del texto) $y=0^\circ+k\cdot 360^\circ$ ó $y=90^\circ+k\cdot 360^\circ$. En el primer giro, si $y=0^\circ\Rightarrow x=90^\circ$ y si $y=90^\circ\Rightarrow x=0^\circ$. Las soluciones del primer giro son, pues, (90º, 0º) y (0º, 90º).

31. Resuelve el sistema $\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos y=\dfrac{3}{4}\\\cos x\operatorname{sen} y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Si sumamos y restamos las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos y=\dfrac{3}{4}\\\cos x\operatorname{sen} y=\dfrac{1}{4}\end{cases}\text{ se obtiene este otro:}$$

$$\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos y+\cos x\operatorname{sen} y=1\\\operatorname{sen} x\cos y-\cos x\operatorname{sen} y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}(x+y)=1\\\operatorname{sen}(x-y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Este da lugar a estos otros dos:

$$(I)\begin{cases}x+y=90^\circ+k_1\cdot 360^\circ\\x-y=30^\circ+k_2\cdot 360^\circ\end{cases}\text{ y }(II)\begin{cases}x+y=90^\circ+k_1\cdot 360^\circ\\x-y=150^\circ+k_2\cdot 360^\circ\end{cases}$$

La soluciones de (I) son de la forma
$[60^\circ+(k_1+k_2)\cdot 180^\circ, 30^\circ+(k_1-k_2)\cdot 180^\circ]$.
Las de (II) son de la forma
$[120^\circ+(k_1+k_2)\cdot 180^\circ, -30^\circ+(k_1-k_2)\cdot 180^\circ]$
$\Leftrightarrow[120^\circ+(k_1+k_2)\cdot 180^\circ, 330^\circ+(k_1-k_2)\cdot 180^\circ]$.
Las soluciones particulares se obtienen dando valores a k_1 y k_2.

k_1 y k_2	Sistema (I)	Sistema (II)
$k_1=k_2=0$	(60º, 30º)	(120º, 330º)
$k_1=1$ $k_2=0$	(240º, 210º)	(300º, 330º)

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más. (En este caso puedes consultar algunas fórmulas).

1. El ángulo $\dfrac{11\pi}{6}$ rad expresado en grados sexagesimales vale:
a) 330º b) 165º c) 150º

a) 330º

2. $1+\operatorname{tg}^2\alpha$ es igual a:
a) $\operatorname{sen}^2\alpha$ b) $\operatorname{cosec}^2\alpha$ c) $\sec^2\alpha$

c) $\sec^2\alpha$

3. Las razones trigonométricas del ángulo 2 550º son las mismas que las del ángulo:
a) 50º b) 30º c) 210º

b) 30º

4. Si $\operatorname{tg}\alpha>0$, sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
a) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ b) $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ c) $\alpha>3$

b) $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

5. De las siguientes fórmulas sólo una es cierta para cualquier valor de letra griega alfa:
a) $\operatorname{sen}(180+\alpha)=\operatorname{sen}(360-\alpha)$
b) $\operatorname{sen}(180+\alpha)=\cos\alpha$
c) $\operatorname{sen}(90-\alpha)=\cos(90+\alpha)$

a) $\operatorname{sen}(180+\alpha)=\operatorname{sen}(360-\alpha)$

6. Señala la fórmula verdadera:

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\beta$

b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta+\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\beta$

c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta+\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta$

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\beta$

7. El valor de la expresión $\dfrac{\text{tg } 23°+\text{tg } 37°}{1-\text{tg } 23°\cdot\text{tg } 37°}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. Sólo una de las siguientes fórmulas es correcta:
a) $\text{tg } 2\beta=2\text{tg } \beta$
b) $\text{tg } 2\beta=\dfrac{2\text{tg } \beta}{1-\text{tg}^2 \beta}$
c) $\text{tg } 2\beta=\dfrac{2\text{tg } \beta}{1-\text{tg}^2 \beta}$

a) $\text{tg } 2\beta=2\text{tg } \beta$

9. Si $\text{tg }(\alpha+\beta)=5$ y $\text{tg } \beta=2$ entonces:
a) $\text{tg } \alpha=3$
b) $\text{tg } \alpha=\dfrac{2}{5}$
c) $\text{tg } \alpha=\dfrac{3}{11}$

c) $\text{tg } \alpha=\dfrac{3}{11}$

10. La solución de la ecuación $\text{tg } \alpha=0$ es:
a) $\alpha=0°$, $\alpha=180°$,
b) $\alpha=0°+k\cdot 180°(k\in Z)$
c) $\alpha=90°+k\cdot 180°(k\in Z)$

c) $\alpha=90°+k\cdot 180°(k\in Z)$

2 cuestiones para investigar

1. Comprueba que el área de cualquier triángulo ABC viene dada por la fórmula $S=\dfrac{1}{2}\cdot a^2\cdot\dfrac{\text{tg } B\cdot\text{tg } C}{\text{tg } B+\text{tg } C}$

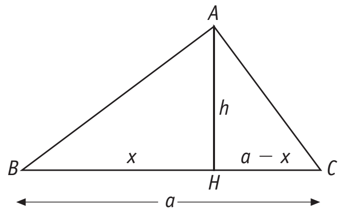


Fig. 7.1.

Observa la figura. El área del triángulo es, como siempre, $S=\dfrac{1}{2}$ base·altura$=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h$. Por otra parte, al trazar la altura h sobre el lado a, dividimos al triángulo ABC en dos:

$$\begin{cases}\text{En el } ABH,\ \text{tg } B=\dfrac{h}{x}\\[2ex] \text{En el } AHC,\ \text{tg } C=\dfrac{h}{a-x}\end{cases}$$

Si despejamos x en la primera, $x=\dfrac{h}{\text{tg } B}$, y sustituimos en la segunda, $h=(a-x)\cdot\text{tg } C=\left(a-\dfrac{h}{\text{tg } B}\right)\cdot\text{tg } C=a\cdot\text{tg } C-h\cdot\dfrac{\text{tg } C}{\text{tg } B}\Rightarrow$

$$h\cdot\left(1+\frac{\text{tg } C}{\text{tg } B}\right)=a\cdot\text{tg } C\Rightarrow h=a\cdot\frac{\text{tg } C}{1+\dfrac{\text{tg } C}{\text{tg } B}}=a\cdot\frac{\text{tg } B\cdot\text{tg } C}{\text{tg } B+\text{tg } C}.$$

Llevando este valor de h a la fórmula del área,

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{\text{tg } B\cdot\text{tg } C}{\text{tg } B+\text{tg } C}=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\text{tg } B\cdot\text{tg } C}{\text{tg } B+\text{tg } C}.$$

2. Compara la demostración clásica (con notación actual) de la fórmula de Herón que encontrarás en http://www.arrakis.es/~mcj/heron.htm con la demostración por métodos trigonométricos que aparece en http://es.wikipedia.org/wiki/heron.

Ver páginas web indicadas.

Actividades

1. **Resuelve el triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa $a = 1$ cm y el cateto $c = 12$ cm.**

sen $C = \frac{12}{15} = 0{,}8 \Rightarrow C = 53°7'48''$. $B = 90°$, $C = 36°52'12''$. El cateto b, por Pitágoras, vale $b = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm.

2. **Las diagonales de un paralelogramo de 19,15 cm² de área forman un ángulo de 50° al cortarse. Calcula la longitud de las diagonales si una mide el doble que la otra.**

Si D es la diagonal mayor, la otra diagonal vale $\frac{D}{2}$. Por tanto el área del paralelogramo será $19{,}15 = \dfrac{\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{4} \cdot \text{sen } 50°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2 = 99{,}994... \Rightarrow D = 10$. Las diagonales miden 10 cm y 5 cm.

3. **Del triángulo *ABC* se conocen los ángulos $\hat{A} = 62°$, $B = 97°$ y el lado $b = 4$ cm. Calcula la longitud del lado *a*.**

Por el teorema del seno,

$a = \dfrac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B} = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 62°}{\text{sen } 97°} \approx 3{,}56$ cm.

4. **Del triángulo *ABC* se conocen los lados $a = 15$ cm, $c = 10$ cm y el ángulo $B = 52°$. Calcula la longitud del lado *b*.**

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 52° = 140{,}30 \Rightarrow b = \sqrt{140{,}3016} \approx 11{,}85$ cm.

5. **Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $\hat{A} = 52°$, $B = 65°$ y $c = 10$ m.**

El tercer ángulo vale $C = 180° - (\hat{A} + B) = 180° - (52° + 65°) = 63°$.

Del teorema del seno $a = \dfrac{c \cdot \text{sen } A}{\text{sen } C} = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 52°}{\text{sen } 63°} = 8{,}84$ cm y

$b = \dfrac{c \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C} = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 65°}{\text{sen } 63°} = 10{,}17$ cm.

6. **Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63°$.**

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 27^2 + 11^2 - 2 \cdot 27 \cdot 11 \cdot \cos 63° \approx 580{,}33 \Rightarrow b = 24{,}09$ m.
De los dos ángulos que faltan por determinar, el menor es C por ser el opuesto al lado menor. Lo calculamos por el teorema del seno:
$\dfrac{11}{\text{sen } C} = \dfrac{24{,}09}{\text{sen } 63°} \Rightarrow \text{sen } C = \dfrac{11 \cdot \text{sen } 63°}{24{,}09}$ Por tanto $C = 24°0'26''$ (un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno. Así, C puede ser $24°0'26''$ o su suplementario, $180° - 24°0'26'' = 155°59'34''$. Pero como $c < b$ también ha de ser $C < B$, es decir $24°0'26''$).

Por último $\hat{A} = 180° - (B + C) = 180° - (63° + 24°0'26'') = 92°59'34''$.

7. **Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54°$.**

Por el teorema del seno
$\dfrac{5}{\text{sen } A} = \dfrac{8}{\text{sen } 54°} \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 54°}{8} = 0{,}505635621$.
De los dos ángulos que tienen este seno ($30°22'25''$ y su suplementario, $149°37'35''$) elegimos el menor, pues al ser $a < b$, será también $A < B$. Por tanto $A = 30°22'25''$.
El tercer ángulo vale $C = 180° - (\hat{A} + B) =$
$= 180° - (30°22'25'' + 54°) = 95°37'35''$.
El lado c se calcula por el teorema del seno:
$c = \dfrac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B} = \dfrac{8 \cdot \text{sen } 95°37'35''}{\text{sen } 54°} \approx 9{,}84$ m.

8. **Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30°$.**

Por el teorema del seno:
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°} = \dfrac{16}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{16 \cdot \text{sen } 30°}{10} = 0{,}8$. El ángulo B puede ser $53°7'48''$ o su suplementario, $126°52'12''$. Las dos soluciones son posibles, pues al ser $a < b$, la condición que tienen que cumplir es que $\hat{A} < B$. Hay por tanto dos soluciones:

Solución 1
$B_1 = 53°7'48''$
$C_1 = 180° - (\hat{A} + B_1) = 180° - (30° + 53°7'48'') = 96°52'12''$.
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°} = \dfrac{c_1}{\text{sen } 96°52'12''} \Rightarrow$

$c_1 = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 96°52'12''}{\text{sen } 30°} \approx 19{,}86$ cm.

Solución 2
$B_2 = 126°52'12''$
$C_2 = 180° - (\hat{A} + B_2) = 180° - (30° + 126°52'12'') = 23°7'48''$.
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°} = \dfrac{c_2}{\text{sen } 23°7'48''} \Rightarrow$

$c_2 = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 23°7'48''}{\text{sen } 30°} \approx 7{,}86$ cm.

9. **Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.**

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow$

$6^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\cos A = \dfrac{241}{252} = 0{,}956349206$, luego $\hat{A} = 16°59'29''$.
Análogamente calculamos el ángulo B:
$9^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos B \Rightarrow$

$\cos B = \dfrac{151}{168} = 0{,}898809523$, luego $B = 25°59'53''$.
Por último, $C = 180° - (\hat{A} + B) = 137°0'38''$.

Problemas propuestos

Tipo I. Resolución de triángulos rectángulos. Áreas de triángulos

1. Cada fila de la siguiente tabla son los datos de un triángulo rectángulo en *A*. Complétala:

B	C	a	b	c
	35º 20′	15 cm		
54º 12′			7 cm	
62º 43′				36 cm
		10 m	5,4 m	
	62º 15′			12 m

B	C	a	b	c
54º 40′	35º 20′	15 cm	12,24 cm	8,67 cm
54º 12′	35º 48′	8,63 cm	7 cm	5,09 cm
62º 43′	27º 17′	78,54 cm	69,8 cm	36 cm
32º 41′ 1″	57º 18′ 59″	10 m	5,4 m	8,42 m
27º 45′	62º 15′	13,56 m	6,31 m	12 m

2. Una escalera de 7 m de longitud se apoya en una pared formando con el suelo un ángulo de 50º. ¿Alcanzará a un balcón situado a 6 m de altura?

No, pues si x es la altura que alcanza la escalera una vez apoyada en el suelo, es $\text{sen } 50^\circ = \dfrac{x}{7} \Rightarrow x = 7 \cdot \text{sen } 50^\circ = 5{,}36$ m, que es menor que 6 m.

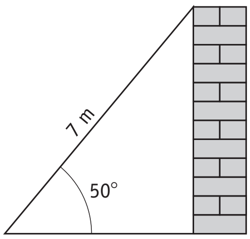


Fig. 8.1.

3. Calcula la altura de un edificio que, desde una distancia de 100 m, se ve bajo un ángulo de 30º.

Si x es la altura del edificio, será $\text{tg } 30^\circ = \dfrac{x}{100} \Rightarrow$ $x = 100 \cdot \text{tg } 30^\circ = 57{,}74$ m.

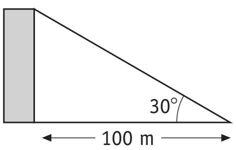


Fig. 8.2.

4. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 8 m cuando los rayos solares forman un ángulo de 60º con el suelo.

Si x es la altura del edificio, será $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{x}{8} \Rightarrow$ $x = 8 \cdot \text{tg } 60^\circ = 13{,}86$ m.

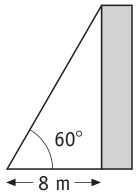


Fig. 8.3.

5. Dos observadores situados a 2 km de distancia ven un avión que vuela entre ambos con ángulos de elevación de 65º y 40º respectivamente.
a) ¿A qué altura vuela el avión?;
b) ¿Cambiaría la solución si el avión vuela a la izquierda de ambos observadores?

a) Si h es la altura del avión, x la distancia del pie de la perpendicular del avión al observador que lo ve bajo un ángulo de 65º, se tiene:

$$\begin{cases} \text{tg } 65^\circ = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 40^\circ = \dfrac{h}{2\,000 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}144 = \dfrac{h}{x} \\ 0{,}839 = \dfrac{h}{2\,000 - x} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema es $x = 562{,}52$ metros y $h = 1\,206{,}04$ m.

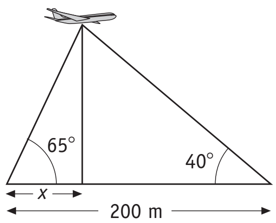


Fig. 8.4.

b) En este caso, si x es la distancia del observador situado más a la izquierda al pied de la perpendicular de la altura del avión, se obtiene el sistema $\begin{cases} \text{tg } 65^\circ = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 40^\circ = \dfrac{h}{2\,000 + x} \end{cases}$

cuya solución es $x = 1\,285{,}82$ m y $h = 2\,756{,}81$ m.

6. Desde una cierta distancia, el ángulo que forma la horizontal con el punto más alto de un árbol es de 60º. Si nos alejamos 10 metros el ángulo anterior es de 30º ¿Cuál es la altura del árbol?

Si h es la altura del árbol y d la distancia inicial, la situación planteada da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{tg } 60^\circ = \dfrac{h}{d} \\ \text{tg } 30^\circ = \dfrac{h}{d + 10} \end{cases}$$

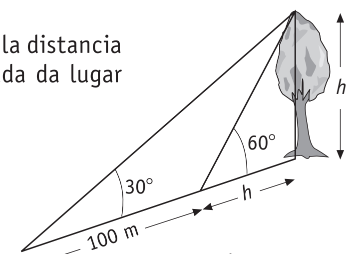


Fig. 8.5.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}=\dfrac{h}{d} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{h}{d+10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}d=h \\ \sqrt{3}d+10\sqrt{3}=3h \end{cases} \Leftrightarrow h=5\sqrt{3}=8{,}66\text{m}.$$

7. Desde un punto del suelo se ve un edificio bajo un ángulo de 55º ¿Bajo qué ángulo se verá situándose a triple distancia?

La situación planteada da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \text{tg } 55º=\dfrac{h}{x} \\ \text{tg } \alpha=\dfrac{h}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=x\cdot\text{tg } 55º \\ \text{tg } \alpha=\dfrac{h}{3x} \end{cases}$$

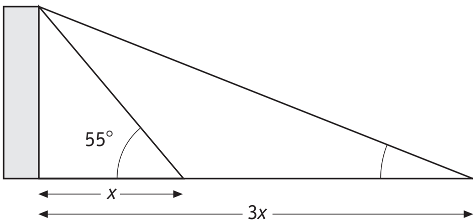


Fig. 8.6.

8. Sobre un montículo de 8 m de altura hemos instalado una antena de 10 m de longitud. ¿Desde qué distancia se verán bajo ángulos iguales el montículo y la antena?

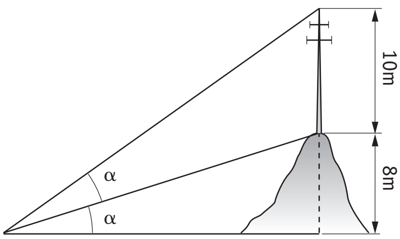


Fig. 8.7.

Se tiene el sistema $\begin{cases} \text{tg } \alpha=\dfrac{8}{x} \\ \text{tg } 2\alpha=\dfrac{18}{x} \end{cases}$. La última ecuación se puede escribir así: $\dfrac{2\text{tg } \alpha}{1-\text{tg}^2 \alpha}=\dfrac{18}{x}$ y sustituyendo la primera en ella,

$$\frac{2\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{64}{x^2}}=\frac{18}{x} \Leftrightarrow \frac{16x^2}{x(x^2-64)}=\frac{18}{x} \Rightarrow 2x^2=1\,152 \Rightarrow x=24 \text{ m}.$$

9. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide 60 cm y el ángulo que forman 42º 14′. Calcula la base, la altura y el área del triángulo.

La altura h sobre la base divide al ángulo de 42º 14′ en dos iguales de 21º 7′.
Si x es la mitad de la base, $x=60\cdot\text{sen } 21º\,7'=21{,}616$ cm. La base será $2x=43{,}23$ cm.
Además $h=60\cdot\cos 21º\,7'=55{,}97$ cm.

Y por tanto, el área $A=\dfrac{43{,}23\cdot 55{,}97}{2}=1\,209{,}79\text{cm}^2$.

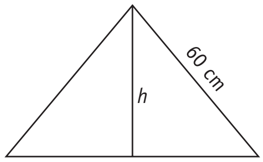


Fig. 8.8.

10. Calcula la apotema de un octógono regular de lado 8 cm.

Uniendo el centro con los vértices, dividimos el octógono en 8 triángulos isósceles iguales. La apotema divide a cada uno de estos en dos triángulos rectángulos, de los que se conoce un cateto, 4 cm, y su ángulo opuesto que mide $\dfrac{360º}{8}:2=45º:2=22º30'$.

Se tiene $\text{tg } 22º30'=\dfrac{4}{a} \Rightarrow a=9{,}66$ cm.

11. Los tres lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Calcula sus ángulos y su área.

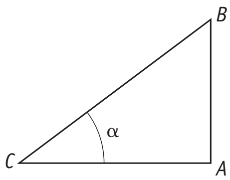


Fig. 8.9.

El triángulo es rectángulo pues entre sus lados se verifica la relación $5^2=3^2+4^2$. Los lados de longitud 3 y 4 cm son los catetos y el de longitud 5 cm es la hipotenusa.
Por ser un triángulo rectángulo, un ángulo vale 90º. Los otros ángulos se calculan así: sen $C=\dfrac{3}{5}=0{,}6 \Rightarrow C=36º\,52'\,11{,}63''$.
El tercer ángulo mide $B=90º-C=53º\,7'\,48{,}37''$.
Por último, el área del triángulo vale
$S=\dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6\text{ cm}^2$.

12. Halla el área de un pentágono regular de 30 cm de lado.

Uniendo el centro con los vértices, dividimos el pentágono en 5 triángulos isósceles iguales. El área del pentágono es 5 veces el área de uno de estos triángulos.
De ellos se conoce el lado desigual, 30 cm, y su ángulo opuesto que mide $\dfrac{360º}{5}=72º$.

Si h es la altura será $h=\dfrac{4}{\text{tg } 36º}=20{,}65$ cm.

El área del triángulo $A_T=\dfrac{11\cdot 20{,}65}{2}=309{,}75\text{ cm}^2$. El área del pentágono $A_p=5A_T=1\,548{,}75\text{ cm}^2$.

13. Calcula el área de los triángulos (no rectángulos) con los datos que se indican:
a) $a=6$ cm, $b=5$ cm, $C=32º$,

b) $b=4$ m, $c=8$ m, $A=93º$,
c) $a=3$ m, $b=5$ m, $c=7$ m.

a) Por la fórmula $S=\frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot \text{sen } C$ resulta $S=\frac{1}{2}\,6\cdot 5\cdot \text{sen } 32º=$ $=7{,}95\ \text{cm}^2$.

b) Análogamente, $S=\frac{1}{2}\,b\cdot c\cdot \text{sen } A$, luego $S=\frac{1}{2}\,4\cdot 8\cdot \text{sen } 93º=$ $=15{,}98\ \text{m}^2$.

c) Como el semiperímetro vale $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3+5+7}{2}=7{,}5$ por la fórmula de Herón, será $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ $=\sqrt{7{,}5\cdot(7{,}5-3)\cdot(7{,}5-5)\cdot(7{,}5-7)}=\sqrt{42{,}1875}=6{,}5\ \text{m}^2$.

14. Las ramas de un compás miden 14 cm. ¿Qué ángulo tendrán que formar para dibujar una circunferencia de 3 cm de radio?

El compás abierto es un triángulo isósceles. El radio de la circunferencia es el lado desigual. Al trazar la altura obtenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa 14 cm. Uno de sus catetos mide $3:2=1{,}5$ cm. Su ángulo opuesto, α, verifica $\text{sen } \alpha=\frac{1{,}5}{14}=0{,}107142857 \Rightarrow \alpha=6º\ 9'\ 2.3''$. El ángulo buscado es $2\alpha=12º\ 18'\ 5''$.

Tipo II. Resolución de triángulos.

15. Cada fila de la siguiente tabla son datos de un triángulo. Resuélvelos.

a	b	c	A	B	C
3 cm	4 cm				28º
		24 m	70º	38º	
3 cm	4 cm		28º		
	16 m	42 m			60º
12 m	7 m	9 m			
	52 cm	60 cm	22º		
32 m				40º	72º

a	b	c	A	B	C
3 cm	4 cm	1,95 cm	46º 14′ 30″	105º 45′ 30″	28º
23,71 m	15,54 m	24 m	70º	38º	72º
3 cm	4 cm	5,87 cm	28º	38º 45′ 10″	113º 14′ 50″
		1,19 cm		141º 14′ 50″	10º 45′ 10″
47,65 m	16 m	42 m	100º 44′ 11″	19º 15′ 49″	60º
12 m	7 m	9 m	96º 22′ 46″	35º 25′ 51″	48º 11′ 23″
22,77 cm	52 cm	60 cm	22º	58º 48′ 51″	99º 11′ 9″
32 m	22,18 m	32,82 m	68º	40º	72º

16. De un triángulo *ABC* se conoce $a=8$ cm, $c=14$ cm y $B=50º$. Halla los ángulos que forma su mediana m_a con el lado *BC*.

Si M es el punto medio del lado *BC*, en el triángulo *ABM* se tiene que $AM=\sqrt{14^2+4^2-2\cdot 14\cdot 4\cdot \cos 50º}=11{,}83$ cm. Por tanto, $\text{sen } M=\frac{14\cdot \text{sen } 50º}{11{,}83} \Rightarrow M=65º\ 2'\ 4''$. El otro ángulo es el suplementario de M, es decir $114º\ 57'\ 56''$.

17. Desde el pueblo *A* se ven los pueblos *B* y *C*, que distan entre sí 6 km, bajo un ángulo de 63º. Si la distancia entre *A* y *B* es de 4 km, calcula lo que distan *A* y *C*.

En el triángulo que forman los tres pueblos es $\text{sen } C=\frac{4\cdot \text{sen } 63º}{6}=0{,}5940... \Rightarrow C=\begin{cases}36º26'30'' \text{ o}\\ 143º33'30''\end{cases}$. La segunda posibilidad es imposible. Por tanto $B=80º\ 33'\ 30''$ y de nuevo por el teorema del seno la distancia buscada es $b=\frac{6\cdot \text{sen } 80º33'30''}{\text{sen } 63º}=6{,}64$ km.

18. Sean *A*, *B* y *C* los tres vértices de un triángulo equilátero de lado 3 cm y *P* el punto del lado *AB* que está a 1 cm del vértice A. ¿Cuál es la longitud del segmento *CP*?

En el triángulo *APC* de la figura es, por el teorema del coseno, $\overline{CP}^2=\overline{AP}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A=7$ cm $\Rightarrow \overline{CP}=\sqrt{7}$ cm.

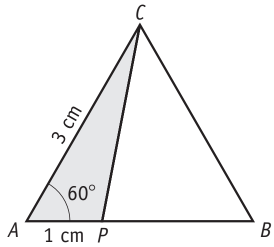


Fig. 8.10.

19. Calcula el área del triángulo *ABC* representado en la figura siguiente:

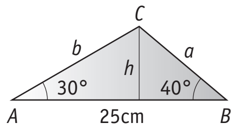


Fig. 8.11.

El ángulo C vale $C=180º-(30º+40º)=110º$.
Por el teorema del seno,
$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow a=\frac{25\cdot \text{sen } 30º}{\text{sen } 110º}=13{,}30$ cm.
Por otra parte, $\text{sen } 40º=\frac{h}{a} \Rightarrow h=a\cdot \text{sen } 40º=8{,}55$ cm.
Luego $S=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{25\cdot 8{,}55}{2}=106{,}88\ \text{cm}^2$.

20. Un campo de fútbol tiene 48 m de ancho y las porterías miden 7 m. ¿Bajo qué ángulo verá la portería un jugador situado en la banda lateral a 18 m del fondo?

Como la portería está centrada en la línea de fondo se tiene, con los datos de la figura, $\text{tg } \beta=\frac{20{,}5}{18} \Rightarrow \beta=48º\ 42'\ 55''$.

Además $\text{tg}\,(\alpha+\beta)=\dfrac{27\cdot 5}{18} \Rightarrow \alpha+\beta=56^\circ\,47'\,36''$.

Luego $\alpha=\ 8^\circ\ 4'\ 41''$.

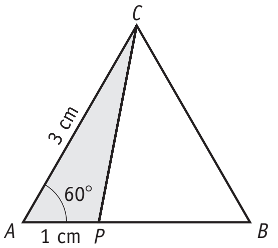


Fig. 8.12.

21. Resuelve un triángulo de perímetro 93 cm cuyos lados están en progresión aritmética de razón 9.

Si un lado es a, los otros son $a+9$ y $a+18$.
Como $a+(a+9)+(a+18)=93 \Rightarrow a=22$.
Los lados miden 22 cm, 31 cm y 40 cm.
Por el teorema del coseno se obtienen los ángulos que son: $33^\circ\,7'\,23''$, $50^\circ\,21'\,7''$ y $96^\circ\,31'\,30''$.

22. Las agujas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.
a) ¿Cuál es la distancia que hay entre sus extremos cuando el reloj marca las cuatro?
b) ¿Cuál es la superficie del triángulo que determinan a esa hora?

La situación se muestra en la figura adjunta.
Cada división horaria equivale a un ángulo de $360^\circ : 12 = 30^\circ$.
A las cuatro, el ángulo que determinan las agujas del reloj será de $4\cdot 30^\circ = 120^\circ$.

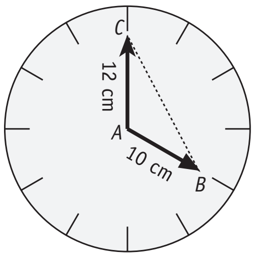


Fig. 8.13.

a) La distancia pedida es, en el triángulo ABC de la figura adjunta, la longitud del segmento BC, que por el teorema del coseno vale $BC^2=10^2+12^2-2\cdot 10\cdot 12\cdot \cos 120^\circ=364$ $\Rightarrow BC=19{,}08$ cm.

b) $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \text{sen}\ A=\dfrac{1}{2}10\cdot 12\cdot \text{sen}\ 120^\circ=51{,}96\ \text{cm}^2$.

23. Calcula los lados y el área de un triángulo de 80 cm de perímetro si sus ángulos están en progresión geométrica de razón 2.

Si un ángulo es A, los otros serán $2A$ y $4A$. Su suma es 180° luego $A+2A+4A=180^\circ$. Es decir $A=25^\circ\,42'\,51''$, $2A=51^\circ\,25'\,43''$ y $4A=102^\circ\,51'\,26''$. Por el teorema del seno y una propiedad de las proporciones es:

$$\frac{a}{\text{sen}\ A}=\frac{b}{\text{sen}\ 2A}=\frac{c}{\text{sen}\ 4A}=\frac{a+b+c}{\text{sen}\ A+\text{sen}\ 2A+\text{sen}\ 4A}=$$
$$=\frac{80}{2{,}190641385}=36{,}52.$$

Luego $a=36{,}52\cdot \text{sen}\ A=15{,}85$ cm; $b=36{,}52\cdot \text{sen}\ 2A=28{,}55$ cm y $c=36{,}52\cdot \text{sen}\ 4A=35{,}6$ cm. El área, por la fórmula de Herón, es $S=\sqrt{40\cdot(40-15{,}85)\cdot(40-28{,}55)\cdot(40-35{,}6)}=220{,}6\ \text{cm}^2$.

24. En una cartulina cuadrada de 24 cm de lado ¿podemos dibujar la circunferencia circunscrita a un triángulo de lados 15, 20 y 25 cm?

Sea R el radio de dicha circunferencia. Si $\hat{A}$ es el ángulo opuesto al lado de longitud $a=15$ cm es, por el teorema del coseno, $\cos \hat{A}=0{,}8$. Luego $\hat{A}=36^\circ\,52'\,11{,}63''$. Como $2R=\dfrac{a}{\text{sen}\ \hat{A}}=\dfrac{15}{0{,}6}=25$ cm, no cabe la circunferencia al ser mayor su diámetro que el lado de la cartulina.

25. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la proporción 2/3. La altura correspondiente a la hipotenusa mide 30 cm. Resuelve el triángulo.

Sea a la hipotenusa, b y c los catetos y supongamos, por ejemplo, $b=\dfrac{2}{3}c$. El área del triángulo es, por una parte, $S=\dfrac{c\cdot\frac{2}{3}c}{2}=\dfrac{c^2}{3}$ y por otra, $S=\dfrac{a\cdot 30}{2}=15a \Leftrightarrow c^2=45a$. Además

$\text{tg}\ B=\dfrac{\frac{2}{3}c}{c}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow B=33^\circ\,41'\,24''$ y $C=90^\circ-B=56^\circ\,18'\,36''$.

Por el teorema de Pitágoras $a^2=\dfrac{4}{9}c^2+c^2=\dfrac{13}{9}c^2=\dfrac{13}{9}\cdot 45a \Rightarrow$

$a=65$ cm y $c=\sqrt{45a}=54{,}08$ cm. Por último, $b=\dfrac{2}{3}c=36{,}06$ cm.

26. Resuelve el triángulo acutángulo inscrito en una circunferencia de radio 3 cm. si dos de sus lados miden 4 y 5 cm. (*Sugerencia:* propiedad del ángulo inscrito).

Sea, por ejemplo, $a=4$ cm y $b=5$ cm. Por la consecuencia del teorema del seno es $\dfrac{4}{\text{sen}\ \hat{A}}=2R=6 \Rightarrow \text{sen}\ \hat{A}=\dfrac{4}{6} \Rightarrow$ $\hat{A}=41^\circ\,48'\,37''$. Al conocer ahora dos lados y un ángulo el triángulo se resuelve fácilmente.

Así $\dfrac{5}{\text{sen}\ B}=6 \Rightarrow B=\begin{cases}56^\circ 26'34''\\ 123^\circ 33'26''\end{cases}$.

Como, por hipótesis, el triángulo es acutángulo, tomamos $B=56^\circ\,26'\,34''$.
Y $C=180^\circ-(\hat{A}+B)=81^\circ\,44'\,49''$.
El tercer lado mide $c=6\cdot \text{sen}\ C=$ $=6\cdot \text{sen}\ 81^\circ\,44'\,49''=5{,}93$ cm.

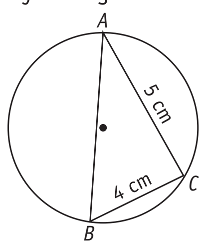


Fig. 8.14.

27. Calcula el área de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual mide 10 cm, inscrito en una circunferencia de 15 cm de radio.

Si c es el lado desigual, por el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{10}{\text{sen } C}=30 \Rightarrow \text{sen } C=\frac{10}{30} \Rightarrow C=\begin{cases}19°28'16''\\160°31'44''\end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones:

- Solución 1: $C_1 = 19°\,28'\,16''$, $\hat{A}_1 = B_1 = 80°\,15'\,52''$; $a_1 = b_1 = 30 \cdot \text{sen } 80°\,15'\,52'' = 29{,}57$ cm. En este caso, el área, por la fórmula de Herón, vale $S_1 = 145{,}72$ cm^2.
- Solución 2: $C_2 = 160°\,31'\,44''$, $\hat{A}_2 = B_2 = 9°\,44'\,8''$; $a_2 = b_2 = 30 \cdot \text{sen } 9°\,44'\,8'' = 5{,}07$ cm. Ahora el área del triángulo vale $S_2 = 4{,}20$ cm^2.

Tipo II. Problemas geométricos

28. Calcula la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 4 cm de lado.

Cada diagonal d es el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm, pues son los lados del pentágono. Dicho lado se opone a un ángulo de $540° : 5 = 108°$. Por el teorema del coseno $d=\sqrt{4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos 108°}=6{,}47$ cm.

29. En una circunferencia de 2 m de radio trazamos una cuerda que une los extremos de un arco de 97º.
a) ¿A qué distancia está la cuerda del centro de la circunferencia?
b) ¿Cuánto mide la cuerda?

Como muestra la figura, si unimos los extremos de la cuerda con el centro de la circunferencia, formamos un triángulo isósceles, cuyos ángulos iguales miden $(180° - 97°) : 2 = 41°\,30'$.

a) $d = 2\text{sen } 41°\,30' = 1{,}33$ m.

b) $AB=\sqrt{2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos 97°}\approx 3$ m.

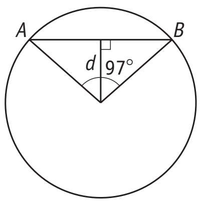


Fig. 8.15.

30. El lado de un rombo mide 18 cm y un ángulo 63º. Halla el área.

En el triángulo ABH de la figura es $h = 18 \cdot \text{sen } 63° = 16{,}04$ cm. El área del rombo es, como la de cualquier paralelogramo, $S = base \cdot altura$; luego $S = 18 \cdot 16{,}04 = 288{,}72$ cm^2.

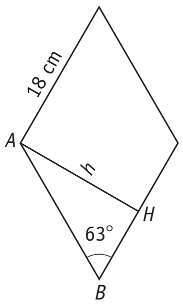


Fig. 8.15.

31. De un triángulo sabemos que la suma de las longitudes de los lados a y b es de 11 m, que el ángulo C opuesto al tercer lado vale 30º y que su área es de 7 m^2.
Calcula:
a) La longitud de cada uno de los lados del triángulo.
b) Los ángulos del triángulo.

a) Como $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\text{sen } 30°$ será, dado que $S = 7$, $7=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow ab = 28$. También $a + b = 11$. Obtenemos, por tanto, el sistema $\begin{cases}a+b=11\\ab=28\end{cases}$.

De la primera, $b = 11 - a$. Sustituyendo en la segunda ecuación, se obtiene

$$a(11 - a) = 28 \Leftrightarrow a^2 - 11a + 28 = 0 \Rightarrow \begin{cases}a=7\\a=4\end{cases}$$

Hay, por tanto dos soluciones:
- $a = 7$ m, $b = 4$ m,
- $a = 4$ m, $b = 7$ m

En ambas soluciones, por el teorema del coseno, el tercer lado vale $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 30° = 16{,}50 \Rightarrow c = 4{,}06$ cm.

b) Si $a = 4$, por el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } A=\frac{4\cdot\text{sen } 30°}{4{,}06}=0{,}4926...$$

$A = 29°\,30'\,44''$. El ángulo B mide $B = 180° - (A + C) = 120°\,29'\,16''$.

Si $a = 7$, será $A = 120°\,29'\,16''$ y $B = 29°\,30'\,44''$.

32. Halla el área de un hexágono regular de 7 cm de lado.

El perímetro del hexágono es 42 cm. Al unir el centro con cada uno de los vértices se obtienen 6 triángulos equiláteros. La altura de cada uno de estos triángulos es también la apotema a del hexágono y vale $a=\frac{3{,}5}{\text{tg } 30°}=6{,}06$ cm. Aplicando la fórmula $A=\frac{p\cdot a}{2}$ se tiene que el área del hexágono es $A=\frac{42\cdot6'06}{2}=127{,}26$ cm^2.

33. Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 9 y 14 cm.

En el dibujo es $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4{,}5}{7}=0{,}642857... \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=32°44'7''$. Luego $\alpha = 65°\,28'\,14''$. Como $2\beta=360°-2\alpha \Rightarrow \beta=114°\,31'\,46''$.

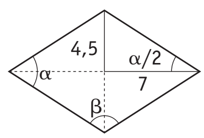


Fig. 8.16.

34. El lado de un octógono regular mide 14 cm. Halla los radios de sus circunferencias inscritas y circunscritas.

Si unimos el centro del octógono con cada uno de sus vértices obtenemos 8 triángulos isósceles. El lado de cada uno de ellos

es el radio r de la circunferencia circunscrita. Sus ángulos iguales miden la mitad del ángulo que abarcan dos lados consecutivos del octógono, es decir la mitad de $\alpha=135°$, o sea 67° 30′. Y el ángulo desigual mide 360° : 8 = 45°. Por el teorema del seno $= \dfrac{r}{\text{sen } 67°30'} = \dfrac{14}{\text{sen } 45°} \Rightarrow r = 18{,}29$ cm.
El radio r' de la circunferencia inscrita es la apotema del octógono. Por tanto $r' = 7 \cdot \text{tg } \dfrac{\alpha}{2} = 16{,}9$ cm.

35. Las diagonales de un rectángulo miden 17 cm y uno de los ángulos que forman al cortarse es de 63°. Calcula el perímetro y el área.

El otro ángulo que forman al cortarse vale 180° − 63° = 117°.
Si a es el lado opuesto al ángulo de 63° es
$a=\sqrt{(8{,}5)^2+(8{,}5)^2-2\cdot 8{,}5\cdot 8{,}5\cdot \cos 63°}=8{,}88$ cm.
Si b es el lado opuesto al ángulo de 117° es
$b=\sqrt{(8{,}5)^2+(8{,}5)^2-2\cdot 8{,}5\cdot 8{,}5\cdot \cos 117°}=14{,}49$ cm. El perímetro es $2a + 2b = 46{,}74$ cm y el área $S = a \cdot b = 128{,}67$ cm².

36. En una circunferencia de 9 cm de radio se traza una cuerda de 14 cm de longitud. Halla:
a) El ángulo formado por los dos radios que pasan por los extremos de dicha cuerda.
b) El ángulo que forman las tangentes a dicha circunferencia trazadas por los extremos de dicha cuerda.
(*Recuerda:* la tangente es perpendicular al radio).

a) Al unir los extremos de la cuerda con el centro de la circunferencia se forma un triángulo isósceles. El ángulo desigual α se calcula por el teorema del coseno: $\cos\alpha=\dfrac{9^2+9^2-14^2}{2\cdot 9\cdot 9} \Rightarrow \alpha=102°\,6'\,54''$.
b) Como los radios y las tangentes se cortan bajo ángulos rectos, en el cuadrilátero que forman el ángulo pedido mide $\beta=360°-180°-\alpha=77°\,53'\,6''$.

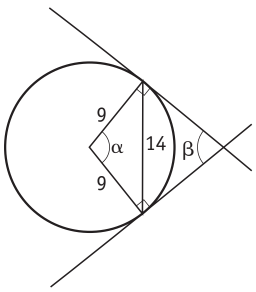


Fig. 8.17.

37. Se sabe que los lados de un triángulo tienen longitud entera cuando se expresan en centímetros, y que el perímetro del triángulo es de 8 centímetros.
Llamando *A* al área del triángulo, calcular todos los valores posibles de *A*.

Si los lados (de menor a mayor longitud) son *a, b y c*, sus longitudes son los números naturales soluciones de la ecuación $a + b + c = 8$. Estas soluciones son:
$a = 1, b = 1, c = 6$; $a = 1, b = 2, c = 5$; $a = 1, b = 3, c = 4$;
$a = 2, b = 2, c = 4$; $a = 2, b = 3, c = 3$.

Como en un triángulo cada lado ha de ser menor que la suma de los otros dos, la única solución posible es la $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$.
Por la fórmula de Herón,
$A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)(p-c)}=\sqrt{4\cdot(4-2)\cdot(4-3)(4-3)}=\sqrt{8}$ cm².

38. Las tangentes comunes a dos circunferencias secantes de 2 y 3 cm de radio forman un ángulo de 36°. Calcula la distancia que hay entre los radios de las circunferencias.

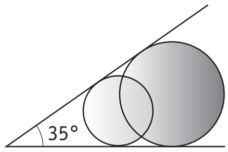


Fig. 8.18.

En la figura, la distancia buscada es BD. La recta que pasa por los centros es la bisectriz del ángulo que forman las dos tangentes. En el triángulo ABC es sen $18° = \dfrac{2}{AB} \Rightarrow AB = 6{,}47$ cm.
En el triángulo ADE es sen $18° = \dfrac{3}{AB+BD} = \dfrac{3}{6{,}47+BD} \Rightarrow$
$\Rightarrow BD = \dfrac{3}{\text{sen } 18°} - 6{,}47 = 3{,}24$ cm.

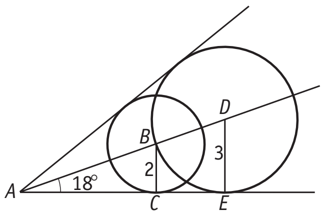


Fig. 8.19.

39. Un jardín tiene forma triangular y sus lados miden 25, 30 y 45 m. Halla el área del mayor adorno circular que puede hacerse en dicho jardín.

Se trata de determinar el radio de la circunferencia inscrita en este triángulo. Si r es el radio buscado, las bisectrices dividen al triángulo en otros tres triángulos, cuyas bases son los lados del inicial, y cuyas alturas son iguales a r. Si S es el área del triángulo inicial será $S=\dfrac{a\cdot r}{2}+\dfrac{b\cdot r}{2}+\dfrac{c\cdot r}{2}=r\cdot\dfrac{a+b+c}{2}=r\cdot p$ donde p es el semiperímetro. En este caso, por la fórmula de Herón, $S=\sqrt{50\cdot(50-25)\cdot(50-30)(50-45)}=353{,}55$ m². Luego $r=\dfrac{S}{p}=7{,}07$ m es el radio y el área del mayor adorno 157,03 m².

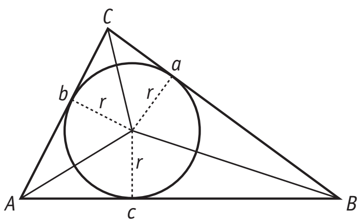


Fig. 8.20.

40. Al construir una ciudad deportiva no se incluyó un círculo para lanzamiento de martillo. Sólo queda disponible un terreno triangular de lados 2, 3,5 y 4 m. ¿Cuál es el radio del círculo máximo que se puede inscribir en dicho terreno?

Como en el problema anterior,
$S=\sqrt{4{,}75\cdot(4{,}75-2)\cdot(4{,}75-3{,}5)\cdot(4{,}75-4)}=3{,}5\ \text{m}^2$.
Luego $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{3{,}5}{4{,}75}=0{,}74$ m.

41. Si sobre los lados opuestos de un cuadrado de 6 dm de lado se construyen triángulos equiláteros situados en el interior del cuadrado se obtiene un rombo. Calcula el perímetro y el área de dicho rombo.

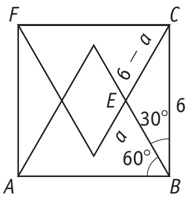


Fig. 8.21.

Sea a el lado del rombo. En el triángulo BCE de la figura es $B=C=30°$ y $E=120°$. Por el teorema del coseno, $6^2=(6-a)^2+(6-a)^2-2\cdot(6-a)\cdot(6-a)\cdot\cos 120°$. Luego $a=2{,}54$ dm y el perímetro $p=10{,}16$ dm.
Los ángulos interiores del rombo miden 60° y 120°. Si D es la diagonal mayor, es $D=\dfrac{a\cdot\text{sen } 120°}{\text{sen } 30°}=4{,}4$ dm. Análogamente, si d es la diagonal menor , $d=a=2{,}54$ dm. El área es $S=\dfrac{D\cdot d}{2}=5{,}59\ \text{dm}^2$.

Tipo III. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles

42. Dos barcos anclados en el mar se ven desde un punto de la costa bajo un ángulo de 37º. El primero se encuentra de dicho punto a 2'5 km y el segundo a 3 km. ¿Qué distancia hay entre los barcos?

Por el teorema del coseno, la distancia
$d=\sqrt{3^2+(2{,}5)^2-2\cdot3\cdot2{,}5\cdot\cos 37°}\approx1{,}8$ km.

43. La aguja en que termina el edificio Chrysler de Nueva York se ve, desde cierto punto del suelo, bajo un ángulo de 70º. Si retrocedemos 106 m se ve bajo un ángulo de 55º. Calcula la altura del edificio.

Fig. 8.22.

En el triángulo ABC es $\hat{A}=110°$ y $C=15°$ y, por el teorema del seno, $x=\dfrac{106\cdot\text{sen } 55°}{\text{sen } 15°}=335{,}49$ m. En el triángulo ACD es $h=335{,}49\cdot\text{sen } 70°=315{,}25$ m.

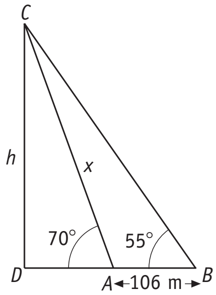


Fig. 8.23.

44. Una estatua y su pedestal se ven bajo ángulos de 13º y 30º respectivamente. Si retrocedemos 20 m el conjunto se ve bajo un ángulo de 11º. Calcula la altura del pedestal y de la estatua.

Sea x la altura del pedestal e y la de la estatua. En el triángulo ABD es $B=137°$ y $D=32°$. Por tanto, $BD=\dfrac{20\cdot\text{sen } 11°}{\text{sen } 32°}=7{,}2$ m.
En el triángulo BCD, $x+y=7{,}2\cdot\text{sen } 43°=4{,}91$ m. También $d=7{,}2\cdot\cos 43°=5{,}26$ m. Por último, en el triángulo BCE es $x=5{,}26\cdot\text{tg } 30°=3{,}04\ \text{m}\Rightarrow y=4{,}91-x=1{,}87$ m.

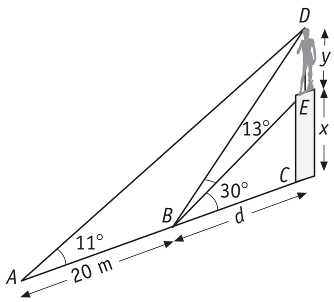


Fig. 8.24.

45. Para salvar un barranco de 25 m de profundidad se quiere construir un puente. Desde cada una de las orillas se ve la misma piedra del fondo bajo ángulos de 43º y 27º respectivamente. Calcula la longitud del puente.

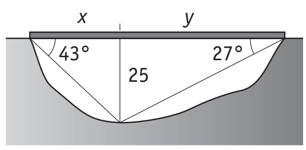


Fig. 8.25.

Con los datos de la figura; $y=\dfrac{25}{\text{tg } 27°}=49{,}07$ m. La longitud del puente será $x+y=75{,}88$ metros.

46. Entre dos transeúntes, situados uno detrás del otro, hay una distancia de 30 m. El más alejado ve un edificio bajo un ángulo de 50º. Desde la azotea del edificio un vigilante

ve a estos transeúntes bajo un ángulo de 24º. Calcula la altura del edificio.

En el triángulo ABD es $B = 180º - (50º + 24º) = 106º$ y $x = \frac{30 \cdot \text{sen } 50º}{\text{sen } 24º} = 56{,}5$ m. En el triángulo BCD es $h = 56{,}5 \cdot \text{sen } 74º = 54{,}31$ m.

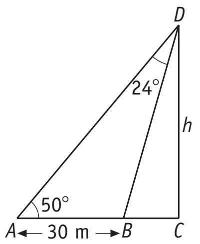


Fig. 8.26.

47. Desde dos puestos de observación forestal que distan entre sí 5 km se descubre una columna de humo. Cada uno ve al otro puesto y al humo bajo ángulos de 63º y 38º respectivamente. ¿A qué distancia de cada puesto está el humo?

En el triángulo que forman las dos atalayas y la columna de humo es $C = 79º$. Por el teorema del seno $\frac{a}{\text{sen } 38º} = \frac{b}{\text{sen } 63º} = \frac{c}{\text{sen } 79º}$. Luego $a = 3{,}14$ km y $b = 4{,}54$ km.

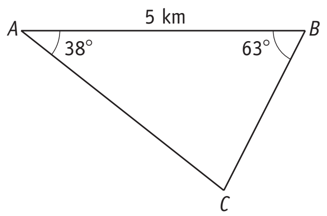


Fig. 8.27.

48. Se quiere construir un túnel que atraviese una montaña. Desde la cima de dicha montaña se ven los puntos de entrada y salida del futuro túnel bajo un ángulo de 42º. Además, la distancia de la cima a estos puntos es de 625 y 750 m respectivamente. Calcula la longitud que tendrá el túnel.

Si d es la longitud del túnel es, por el teorema del coseno, $d = \sqrt{625^2 + 750^2 - 2 \cdot 625 \cdot 750 \cdot \cos 42º} \approx 506{,}39$ m.

49. Desde un punto vemos un edificio, situado en la otra orilla del río, bajo un ángulo de 18º. Aproximándonos 26 m a la orilla el ángulo es de 32º. Halla la altura del edificio.

Con los datos de la figura es $x = \frac{26 \cdot \text{sen } 18º}{\text{sen } 14º} = 33{,}21$ m. Por tanto, $h = 33{,}21 \cdot \text{sen } 32º = 17{,}6$ m.

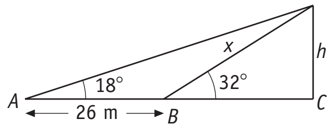


Fig. 8.28.

50. La pantalla de un cine, de 4 m de alta, está situada a 3 m del suelo ¿Bajo qué ángulo verá dicha pantalla un espectador situado a 20 m de la pared, que sentado en la butaca alcanza los 1,5 m de altura?

Con los datos de la figura es $\text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{5{,}5}{20} \Rightarrow \alpha + \beta = 15º\ 22'\ 35''$. Y $\text{tg } \beta = \frac{1'5}{20} \Rightarrow \beta = 4º\ 17'\ 21''$.

Luego el ángulo pedido vale $\alpha = 11º\ 5'\ 14''$.

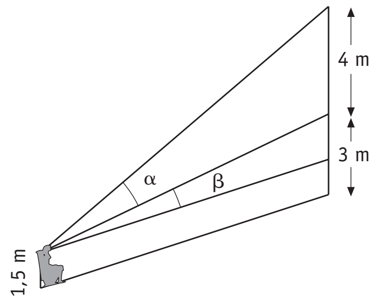


Fig. 8.29.

Tipo IV. Cálculo de distancias entre puntos inaccesibles

51. Dos aviones que se encuentran a 7 y 9 km de un aeropuerto se observan desde éste bajo un ángulo de 39º. ¿Qué distancia separa a los aviones?

Por el teorema del coseno, la distancia $d = \sqrt{7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 39º} \approx 5{,}66$ km.

52. Desde nuestro lugar de observación vemos dos hoteles, situados en la orilla de un lago, bajo un ángulo de 65º. Calcula la distancia entre los dos hoteles si distan de nuestro lugar de observación 3,5 y 2,6 kms respectivamente.

Por el teorema del coseno, la distancia $d = \sqrt{(3{,}5)^2 + (2{,}6)^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}6 \cdot \cos 65º} \approx 3{,}36$ m.

53. Dos barcos salen al mismo tiempo del puerto. Toman rumbos que forman entre sí un ángulo de 58º. El primero navega a una velocidad de 35 km/h y el segundo a 42 km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 3 horas de navegación?

Al cabo de tres hora el primero se encuentra a 126 km del punto de partida, el segundo a 105 km y, por el teorema del coseno, se encuentran entre ellos a una distancia $d = \sqrt{126^2 + 105^2 - 2 \cdot 126 \cdot 105 \cdot \cos 58º} \approx 113{,}49$ km.

54. Desde un avión se ven dos pueblos, situados en el mismo plano vertical que el avión, bajo ángulos de 54º y 29º respectivamente. Si los pueblos distan entre sí 3 km, calcula la distancia del avión a cada uno de los pueblos y la altura a la que vuela.

En el triángulo APQ de la figura adjunta es $\hat{A} = 25º$, $Q = 29º$ y $P = 126º$.

Por tanto $x = \frac{3 \cdot \text{sen } 29º}{\text{sen } 25º} = 3{,}44$ km e $y = \frac{3 \cdot \text{sen } 126º}{\text{sen } 25º} = 5{,}74$ km.

En el triángulo *ABP*, $\hat{A} = 36°$,
luego $h = x \cdot \cos 36° = 3{,}44 \cdot \cos 36° = 2{,}78$ km.

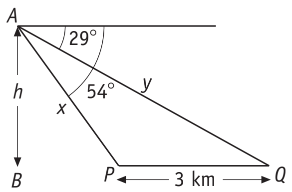


Fig. 8.30.

55. Hemos de hacer un mapa de una cierta zona geográfica. *A*, *B* y *C* son las cimas de tres montañas de la misma altura, de manera que las posiciones de *A* y *B* son conocidas y ya están representadas en el mapa, mientras que la posición de *C* se ha de determinar.
Nos situamos en *A* y medimos el ángulo entre la línea *A–B* y la línea *A–C*, que es de 68º. Nos situamos en *B* y aquí medimos el ángulo entre las líneas *B–C* y *B–A*, que resulta ser de 35º. En el mapa que tenemos, la distancia sobre el papel entre *A* y *B* es de 3 cm.
a) Haz un diagrama de la situación y determina cuál es el ángulo que forman las líneas *C–A* y *C–B*.
b) ¿Cuál será, sobre el mapa, las distancias entre *A* y *C* y entre *B* y *C*?
c) Si el mapa es a escala 1:50 000, calcula la distancia real entre los puntos *A*, *B* y *C*.

a) El diagrama puede ser el de la figura adjunta.
El ángulo que forman las líneas *C–A* y *C–B* vale
$180° - (35° + 68°) = 77°$.

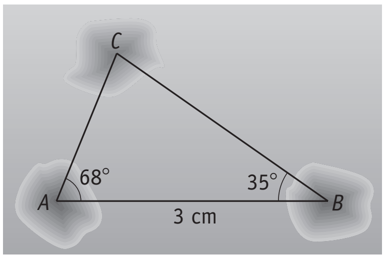


Fig. 8.31.

b) Por el teorema del seno en el triángulo *ABC* es

$$= \frac{AC}{\text{sen } 35°} = \frac{BC}{\text{sen } 68°} \frac{3}{\text{sen } 77°} \Rightarrow \begin{cases} AC = \dfrac{3 \cdot \text{sen } 35°}{\text{sen } 77°} = 1{,}766 \text{ cm} \\ BC = \dfrac{3 \cdot \text{sen } 68°}{\text{sen } 77°} = 2{,}855 \text{ cm} \end{cases}$$

c) La escala 1:50 000 significa que 1 cm del mapa equivale a 50 000 cm = 500 m en la realidad.
Luego $d(A, B) = 3 \cdot 500 = 1500$ m; $d(A, C) = 1{,}766 \cdot 500 = 883$ m y $d(B, C) = 2{,}855 \cdot 500 = 1\,427{,}5$ m.

56. Para medir la altura de una montaña se han hecho dos observaciones desde los puntos A y B distantes entre sí 800 m. Desde el punto B se ve la montaña bajo un ángulo de 47º. Los ángulos que las visuales desde A y B forman con la recta AB son de 38º y 53º respectivamente. Halla la altura de la montaña.

En el triángulo *ABD* de la figura adjunta es $D = 89°$. Por el teorema del seno es $BD = \dfrac{800 \cdot \text{sen } 38°}{\text{sen } 89°} = 492{,}6$ m y en el triángulo *BCD* la altura de la montaña es $h = BD \cdot \text{sen } 47° = 492{,}6 \cdot \text{sen } 47° = 360{,}27$ m.

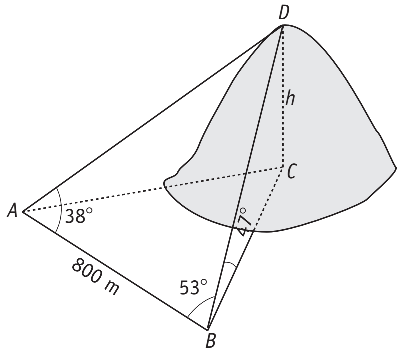


Fig. 8.32.

57. Dos personas *A* y *B*, distantes entres sí 60 m, observan a una tercera *C* que cuida de un globo anclado al suelo. La persona *B* ve el globo bajo un ángulo de 27º, y a las otras dos bajo un ángulo de 46º. Si *C* ve a los otros dos bajo un ángulo de 54º, calcula la altura del globo y el ángulo bajo el que *A* ve el globo.

En el triángulo *ABC* de la figura, $\hat{A} = 180° - (54° + 46) = 80°$. Por el teorema del seno es $BC = \dfrac{60 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 54°} = 73{,}04$ m. y $AC = \dfrac{26 \cdot \text{sen } 46°}{\text{sen } 54°} = 53{,}35$ m.
Por tanto, en el triángulo *BCD* la altura del globo es $h = BC \cdot \text{tg } 27° = 73{,}04 \cdot \text{tg } 27° = 37{,}22$ m. Y en el triángulo *ACD* es $\text{tg } \hat{A} = \dfrac{h}{AC} = \dfrac{37{,}22}{53{,}35}$. Luego el ángulo bajo el que la persona *A* ve el globo es $\hat{A} = 34°\ 54'\ 7''$.

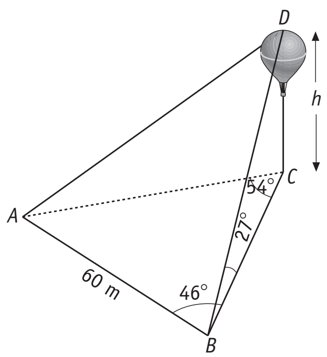


Fig. 8.33.

58. Un faro, construido sobre una roca, tiene 25 m de altura. Desde la playa, la distancia a la base del faro es de 24 m y al punto más alto del faro 43 m. Calcula la altura de la roca sobre la que se edificó el faro.

En el triángulo *ACD* de la figura es, por el teorema del coseno, $\cos D = \dfrac{43^2 + 25^2 - 24^2}{2 \cdot 43 \cdot 25} \Rightarrow D = 28°\,1'\,9''$. En el triángulo *ABD* es $25 + h = 43 \cdot \cos D \Rightarrow h = 43 \cdot \cos 28°\,1'\,9'' - 25 = 12{,}96$ m.

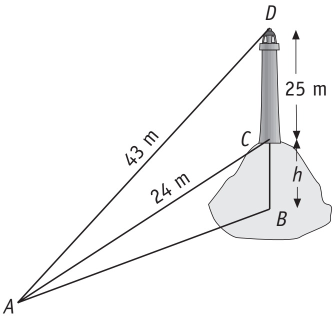


Fig. 8.34.

59. Desde dos puntos *A* y *B*, distantes 750 m, y situados en la misma orilla del río se ven dos puntos *C* y *D* en la otra orilla. Se han medido los siguientes ángulos: *BAD* = 68º, *BAC* = 32º, *ABD* = 45º y *ABC* = 72º. Calcula la distancia entre *C* y *D*.

En el triángulo *ABD* de la figura es $D = 67º$ y $BD = \dfrac{750 \cdot \text{sen } 68º}{\text{sen } 67º} = 755{,}44$ m. En el triángulo *ABC* es $C = 76º$ y $BC = \dfrac{750 \cdot \text{sen } 32º}{\text{sen } 76º} = 409{,}6$ m. Por último, en el triángulo *BCD* es $B = 72º - 45º = 27º$ y, por el teorema del coseno $CD = \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos 27º} \approx 432{,}5$ m.

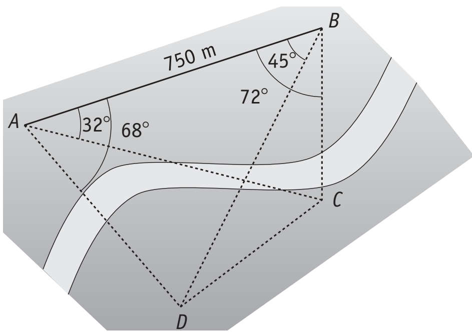


Fig. 8.35.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más. (En este caso puedes consultar algunas fórmulas).

1. Para resolver un triángulo basta con conocer:
a) dos de sus lados
b) los tres ángulos
c) dos lados y un ángulo.

c) dos lados y un ángulo.

2. Los lados de un triángulo son proporcionales a:
a) los cosenos de los ángulos opuestos
b) los senos de los ángulos opuestos
c) los senos de los ángulos adyacentes.

b) los senos de los ángulos opuestos

3. En el triángulo *ABC*, $\hat{A} = 30º$, $B = 60º$ y $C = 90º$. Resuélvelo sabiendo que el lado más pequeño vale 1 m.

$b = \sqrt{3}$

4. En un triángulo, si un lado mide doble que otro, los correspondientes ángulos opuestos:
a) uno tiene doble amplitud que el otro
b) uno mide la mitad que el otro
c) sólo se puede asegurar que sus senos son proporcionales.
(*Sugerencia:* Si no lo ves claro, utiliza el resultado de la cuestión anterior.)

c) sólo se puede asegurar que sus senos son proporcionales.

5. En el triángulo *ABC*, $a = 2$ m, $b = 4$ m y $\hat{A} = 30º$ entonces:
a) $B = 60º$
b) $B = 32º$
c) $B = 90º$

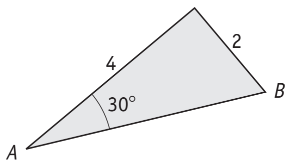


Fig. 8.36.

c) $B = 90º$

6. En el triángulo *ABC*, $a = 3$ cm, $\hat{A} = 50º$, $B = 25º$ entonces:
a) $b = 1'66$ cm
b) $b = 1'5$ cm
c) $b = 2'75$ cm

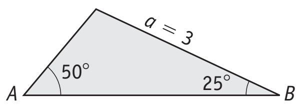


Fig. 8.37.

a) $b = 1'66$ cm

7. Representa (mediante un esbozo aproximado) las dos posibles soluciones del triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 74$ cm, $b = 53$ cm y $B = 36º$.

8. Con los datos de la cuestión anterior, da los dos valores posibles del ángulo *A*.

55º 9′ 11′′ y 124º 50′ 49′′

9. Para cualquier triángulo, sólo una de estas relaciones es cierta:
a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ab$ sen B
b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos A$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

10. Aplica el teorema del coseno para determinar el ángulo *A* del triángulo de lados $a = 20$, $b = 10$ y $c = 15$.

104º 28′ 39″

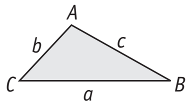


Fig. 8.38.

2 cuestiones para investigar

1. Demuestra el teorema de la tangente: en todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos. Esto es $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$

(Sugerencia: Aplica al teorema del seno la siguiente propiedad de las proporciones: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$**).**

Por el teorema del seno, $\dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{b}{\text{sen } B}$. Aplicando la propiedad de las proporciones citada en la sugerencia, será: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}$.

Por las fórmulas de transformación, esta última expresión se puede escribir así:

$$\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}=\frac{2\text{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\,\text{sen}\dfrac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}},$$ de donde

se concluye el teorema de la tangente.

Actividades

1. Dado el número complejo $z = 1 - 2i$ se pide:
a) ¿qué valor ha de tener x para que $3x - 2i = z$?
b) Calcula el opuesto de su conjugado.
c) Calcula el conjugado de su opuesto.

a) $3x - 2i = 1 - 2i \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) El conjugado de $z = 1 - 2i$ es $\bar{z} = 1 + 2i$ y su opuesto $-\bar{z} = -1 - 2i$.

c) Su opuesto es $-z = -1 + 2i$; el conjugado de este, $\overline{-z} = -1 - 2i$.

2. Efectúa $\dfrac{3 \cdot i^{770} + i^{2043}}{1 + i^{4153}}$.

Como $770 = 4 \cdot 192 + 2; 2\,043 = 4 \cdot 510 + 3$ y $4\,153 = 4 \cdot 1\,038 + 1$, se tiene que $\dfrac{3 \cdot i^{770} + i^{2043}}{1 + i^{4153}} = \dfrac{3 \cdot i^2 + i^3}{1 + i} = \dfrac{-3 - i}{1 + i} = -2 + i$

3. Expresa el número $2(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°)$ en forma polar y binómica.

$2(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°) = 2[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)] =$

$= 2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = \sqrt{3} - i$ que es su forma binómica.

La forma polar será $2_{-30°}$ ó $2_{330°}$.

4. Teniendo en cuenta que $1_{45°} : 1_{30°} = 1_{15°}$ calcula sen 15° y cos 15°.

Por una parte se tiene que $\dfrac{1_{45°}}{1_{30}} = 1_{15°} = 1(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) = \cos 15° + i \operatorname{sen} 15°$.

Por otra parte, $\dfrac{1_{45°}}{1_{30}} = \dfrac{1(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)}{1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i} =$

$= \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i$

Igualando partes real e imaginaria de ambas expresiones se obtiene:

$\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

5. Calcula y representa gráficamente las soluciones de la ecuación $z^3 + 2 - 2i = 0$.

Las soluciones de la ecuación $z^3 + 2 - 2i = 0$ son $z = \sqrt[3]{-2 + 2i}$. Para calcular esta raíz cúbica, expresamos el radicando en forma polar; $-2 + 2i$ tiene por módulo $m = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ y por argumento $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{-2} = 135°$ pues está situado en el segundo cuadrante.

Por tanto,

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{(\sqrt{8})_{135°}} = (\sqrt[6]{8})_{\frac{135° + k \cdot 360°}{3}} = (\sqrt{2})_{45° + k \cdot 120°} =$$

$$= \begin{cases} (\sqrt{2})_{45°} \\ (\sqrt{2})_{165°} \\ (\sqrt{2})_{285°} \end{cases}$$

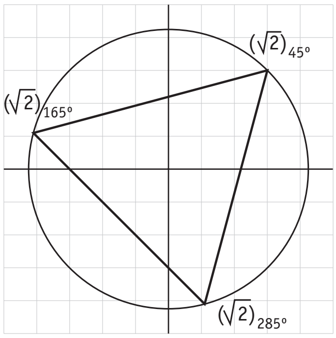


Fig. 9.1.

Los afijos de estas raíces están situadas sobre una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y son los vértices de un triángulo equilátero.

6. Encuentra la ecuación que tiene por raíz a los números $z_1 = 1$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = 1 + 3i$.

La ecuación buscada será

$(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot [z - (1 - 3i)] \cdot [z - (1 + 3i)] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z^2 - 1) \cdot (z^2 - 2z + 10) = 0 \Leftrightarrow z^4 - 2z^3 + 9z^2 + 2z - 10 = 0$

Problemas propuestos

Tipo I. Partes real e imaginaria del número complejo. Representación gráfica

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) $2 + 3i$ **b) $-1 + i$**
c) $-2 - 2i$ **d) $4 - 3i$**

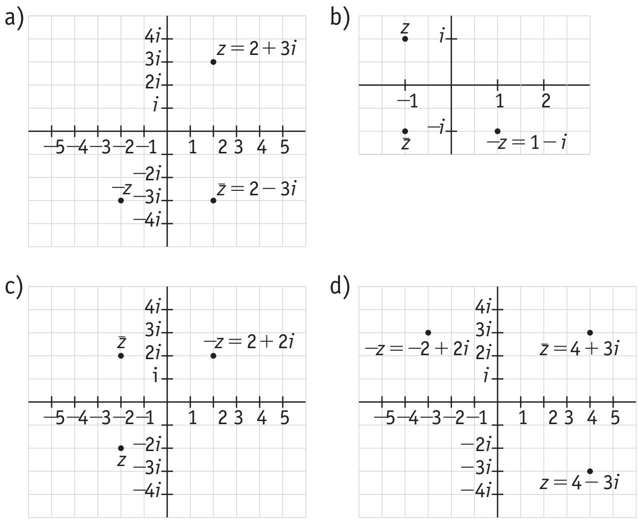


Fig. 9.2.

2. Representa gráficamente los números complejos $z = x + yi$ tales que:
a) Su parte real sea −2.
b) Su parte imaginaria sea 3.
c) $2 < y \leqslant 2$
d) $0 \leqslant x \leqslant 3$
e) $|z| \leqslant 2$

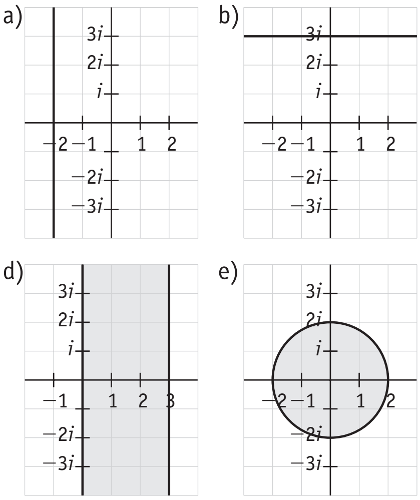


Fig. 9.3.

a) Son los números situados sobre la recta vertical $x = -2$.
b) Son los números situados sobre la recta horizontal $y = 3$.
c) Son los números comprendidos entre las rectas $y = 2$ e $y = 3$ (los situados sobre la segunda recta pertenecen, no así los de la primera).
d) Son los números comprendidos entre las rectas $x = 0$ y $x = 3$ (los situados sobre ambas rectas pertenecen).
e) Son los números de la circunferencia centrada en el origen de radio 2 y los del interior de dicha circunferencia.

3. Representa gráficamente los números complejos que:
a) tienen módulo 3,
b) tienen argumento 180º,
c) tienen argumento 45º,
d) satisfacen la ecuación $x^2 + 9 = 0$.

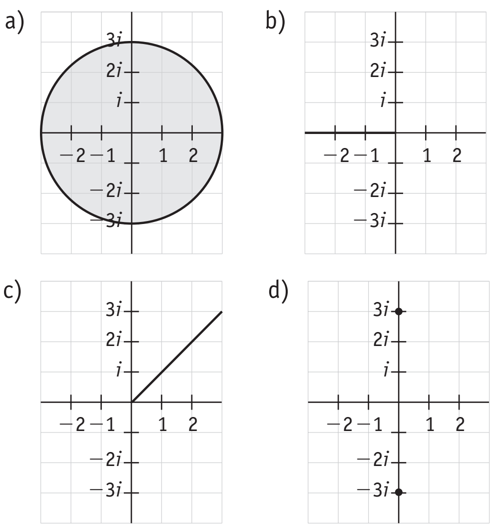


Fig. 9.4.

a) Son los números cuyos afijos están sobre la circunferencia centrada en el origen y radio 3.
b) Son los números cuyos afijos están situados en la parte negativa del eje real.
c) Son los números cuyos afijos están situados sobre la bisectriz del primer cuadrante.
d) Son los números $z = 3i$ y $z' = -3i$.

4. Representa gráficamente los números complejos que verifican la ecuación:
a) $z - \bar{z} = 4i$ b) $z + \bar{z} = 2$ c) $z \cdot \bar{z} = 5$

Si $z = x + yi$ será $\bar{z} = x - yi$. Luego:
a) La ecuación $z - \bar{z} = 4i$ es equivalente a $2yi = 4i \Rightarrow y = 2$. La parte real x puede ser cualquier número, luego $z = x + 2i$.
b) $z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Es decir, $z = 1 + yi$.
c) $z \cdot \bar{z} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$. La solución son los números situados sobre la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt{5}$.

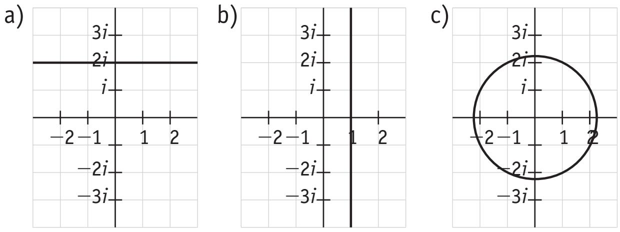


Fig. 9.5.

5. Indica qué condición (o condiciones) cumplen los números complejos $z = x + yi$ cuya representación gráfica se muestra:

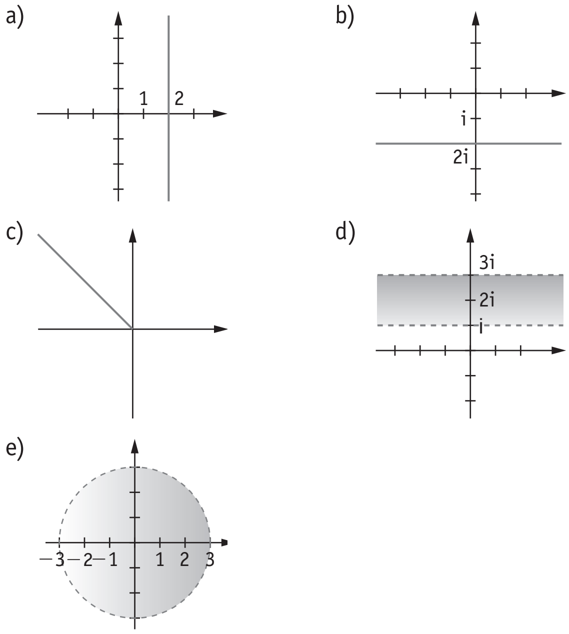


Fig. 9.6.

a) $x = 2$.
b) $y = -2$.
c) Su argumento es 135º.
d) $1 < y \leqslant 3$
e) $x^2 + y^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow |z| \leqslant 3$

6. **Completa la tabla:**

z	$-z$	$\bar{z}=$	$1/z$
$2-3i$			
	$-1+4i$		
		$3-3i$	
			i

z	$-z$	$\bar{z}=$	$1/z$
$2-3i$	$-2+3i$	$2+3i$	$\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
$1-4i$	$-1+4i$	$1+4i$	$\frac{1}{17}+\frac{4}{17}i$
$3+3i$	$-3-3i$	$3-3i$	$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$
$-i$	i	i	i

7. **a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z=a+bi$, y el opuesto del con jugado del mismo número? Razone la respuesta.**
b) Calcule los números x e y de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$.

a) Si $z=a+bi$, su opuesto es $-z=-a-bi$. Y el conjugado de su opuesto es $\overline{-z}=-a+bi$.
Por otra parte, el conjugado de z es $\bar{z}=a+bi$; y el opuesto del conjugado $-\bar{z}=-a+bi$. Luego $\overline{-z}=-\bar{z}$, es decir, los dos números del enunciado son iguales.

b) $\frac{3-xi}{1+2i}=\frac{(3-xi)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}=\frac{3-2x}{5}+\frac{-6-x}{5}i.$

Como dos números complejos son iguales si lo son sus partes real e imaginaria ha de ser:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{3-2x}{5}=y\\ \frac{-6-x}{5}=2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-16\\ y=7\end{array}\right..$$

8. **Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:**

a) $(8-3i)(1+ki)$ b) $(k+\sqrt{2}i)^2$ c) $\frac{k-2i}{8+2i}$

a) $(2-3i)(1+ki)=(2+3k)+(2k-3)i \Rightarrow$
$\Rightarrow 2+3k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{2}{3}$

b) $(k+\sqrt{2}i)^2=(k^2-2)+2k\sqrt{2}i \Rightarrow k^2-2=0 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$

c) $\frac{k-2i}{8+2i}=\frac{8k-4}{68}-\frac{2k+16}{68}i \Rightarrow \frac{8k-4}{68}=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

9. **Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:**

a) $(3+ki)(6-3i)$ b) $\frac{k-2i}{5-6i}$ c) $\frac{1+i}{k+2i}$

a) $(3+ki)(6-3i)=(18+3k)+(6k-9)i \Rightarrow$
$\Rightarrow 6k-9=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

b) $\frac{k-2i}{5-6i}=\frac{5k+12}{61}+\frac{6k-10}{61}i \Rightarrow \frac{6k-10}{61}=0 \Leftrightarrow k=\frac{5}{3}$

c) $\frac{1+i}{k+2i}=\frac{k+2}{k^2+4}+\frac{k-2}{k^2+4}i \Rightarrow \frac{k-2}{k^2+4}=0 \Leftrightarrow k=2$

10. **Determina k para que el número $(2-ki)^2$ sea:**
a) un número real,
b) un número imaginario puro.

Como $(2-ki)^2=(4-k^2)-4ki$, se tiene:
a) para que sea un número real $\Rightarrow -4k=0 \Leftrightarrow k=0$,
b) para que sea un número imaginario puro $\Rightarrow 4-k^2=0 \Leftrightarrow k=\pm2$.

11. **Determina el valor de k para el número $\frac{3-2ki}{4-3i}$**
a) sea un número real.
b) sea un número imaginario puro.
c) tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

Como $\frac{3-2ki}{4-3i}=\frac{12+6k}{25}+\frac{9-8k}{25}i$ se tiene que:

a) para que sea un número real:
$\frac{9-8k}{25}=0 \Rightarrow 9-8k=0 \Leftrightarrow k=\frac{9}{8}$

b) para que sea un número imaginario puro:
$\frac{12+6k}{25}=0 \Rightarrow 12+6k=0 \Leftrightarrow k=-2$

c) para que tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante:
$\frac{12+6k}{25}=\frac{9-8k}{25} \Rightarrow k=-\frac{3}{14}$

12. **Determina el valor de a y b para el número $\frac{a-3i}{4+bi}$ sea igual a $(\sqrt{2})_{135^\circ}$.**

Como $(\sqrt{2})_{135^\circ}=-1+i$, la relación
$\frac{a-3i}{4+bi}=(\sqrt{2})_{135^\circ} \Rightarrow a-3i=(4+bi)\cdot(-1+i)=$
$=(-4-b)+(4-b)i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=-4-b\\ -3=4-b\end{array}\right.$, es decir $a=-11$, $b=7$

13. **Determina el valor de a para que el módulo del número $\frac{a+i}{3+i}$ sea $\sqrt{5}$.**

$\frac{a+i}{3+i}=\frac{3a+1}{10}+\frac{3-a}{10}i.$

Su módulo es $m=\sqrt{\left(\frac{3a+1}{10}\right)^2+\left(\frac{3-a}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+1}{10}}.$

Si ha de ser $m=\sqrt{5}$, será $\frac{a^2+1}{10}=5 \Rightarrow a^2=49$, es decir $a=\pm7$.

14. **Determina el valor de k para que el módulo del número $\frac{3+ai}{1+ai}$ sea $\sqrt{3}$.**

$\frac{3+ai}{1+ai}=\frac{a^2+3}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}i.$

Su módulo es $m=\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{a^2+1}\right)^2+\left(-\frac{2a}{a^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}}$.

Si queremos que valga $\sqrt{3}$, será $\sqrt{\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}}=\sqrt{3}$, es decir

$\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}=3 \Rightarrow a^4-2a^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2=3 \\ a^2=-1. \end{cases}$

La última posibilidad es imposible, luego $a=\pm\sqrt{3}$.

Tipo II. Formas de un número complejo. Operaciones

15. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)$

c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

f) $(3-2i)(3+2i)$

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$

b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)=1-\frac{15}{2}i$

c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)=8+\frac{7}{2}i$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i$

e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)=3-2i$

f) 13

16. Calcula:

a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}$ **b)** $(3-2i)^2$

c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2$ **d)** $(-1+2i)^6$

a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}=i^2+i^1+i^3=-1+i-i=-1$

b) $(3-2i)^2=5-12i$

c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2=-\frac{5}{4}+3i$

d) Utilizando el binomio de Newton, $(-1+2i)^6=117-4i$.

17. Dados $z_1=3-2i$, $z_2=-3+i$ y $z_3=5i$, calcula:

a) $z_1+z_2+z_3$ **b)** $z_1+2z_2-z_3$

c) $z_1(z_2+z_3)+z_3$ **d)** $\frac{z_2-z_1}{z_3}$

e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)$

a) $z_1+z_2+z_3=4i$

b) $z_1+2z_2-z_3=-3-5i$

c) $z_1(z_2+z_3)+z_3=3+29i$

d) $\frac{z_2-z_1}{z_3}=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$

e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)=-42-39i$

18. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ **b)** $(2\sqrt{3}-2i)^5$

c) $\frac{2}{3-i}$ **d)** $\frac{1+i}{1-i}$

e) $\frac{(4-i)^2(3+i)}{2-i}$ **f)** $\frac{2-i}{2+i}-(1-3i)^2$

g) $\frac{5+i}{3-i}\cdot\frac{1+i}{2i}$ **h)** $\frac{(1-2i)^2}{3+i}+\frac{5-2i}{1+i}$

j) $\frac{3+3i}{1-3i}-\frac{1}{2+i}$

a) El número $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ en polares es 1_{45°.

Luego $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8=(1_{45^\circ})^8=1_{360^\circ}=1.$

b) En polares $2\sqrt{3}-2i=4_{330^\circ}$.

Luego $(2\sqrt{3}-2i)^5=(4_{330^\circ})^5=(4^5)_{5\cdot 330^\circ}=1\,024_{1\,650^\circ}=$
$=1\,024_{210^\circ}=1\,024\ (\cos 210^\circ+i \text{ sen } 210^\circ)=$
$=1\,024=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-512\sqrt{3}-512i$

c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ d) i e) $23+7i$

f) $\frac{43}{5}+\frac{26}{5}i$ g) $\frac{11}{10}-\frac{3}{10}i$ h) $\frac{1}{5}-\frac{22}{5}i$

j) $-1+\frac{7}{5}i$

19. Expresa en forma binómica:

a) $2(\cos 135^\circ+i\text{sen } 135^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\text{sen } 45^\circ)$

b) $\frac{4(\cos 240^\circ+i \text{ sen } 240^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 30^\circ+i \text{ sen } 30^\circ)}$

c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $[2(\cos 30^\circ+i\text{sen } 30^\circ)]^5$

a) $2(\cos 135^\circ+i\text{sen } 135^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\text{sen } 45^\circ)=$
$=2_{135^\circ}\cdot 3_{45^\circ}=6_{180^\circ}=-6.$

b) $\dfrac{4(\cos 240^\circ + i \text{ sen } 240^\circ)}{\dfrac{1}{2}(\cos 30^\circ + i \text{ sen } 30^\circ)} = \dfrac{4_{240^\circ}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)_{30^\circ}} = 8_{210^\circ} =$

$= 8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -4\sqrt{3} - 4i$

c) $2\left(\cos \dfrac{5\pi}{6} + i\text{sen } \dfrac{5\pi}{6}\right) \cdot \dfrac{1}{4}\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i\text{sen } \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= 2_{\frac{5\pi}{6}} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2}i\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

d) $[2(\cos 30^\circ + i\text{sen } 30^\circ)]^5 = (2_{30^\circ})^5 = 32_{150^\circ} =$

$= 32\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -16\sqrt{3} + 16i$

20. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $2_{210^\circ} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)_{60^\circ}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)_{150^\circ} : 3_{30^\circ}$ **c)** $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

a) $2_{210^\circ} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)_{60^\circ} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270^\circ} = -\dfrac{1}{2}i$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)_{150^\circ} : 3_{30^\circ} = \left(\dfrac{1}{9}\right)_{120^\circ} = \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right) = -\dfrac{1}{18} + \dfrac{\sqrt{3}}{18}i$

c) $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{\frac{4\pi}{3}} = (2\sqrt{2})_{\frac{5\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$

21. Si $z = 4_{60^\circ}$ y $z' = 2_{45^\circ}$ calcula:

a) $z + z'$ **b)** $z \cdot z'$

c) $\dfrac{z}{z'}$ **d)** $z^2 \cdot z'$

e) $z^2 \cdot \overline{z'}$ **f)** $(-z) \cdot z'$

$z = 4_{60} = 4(\cos 60^\circ + i\text{sen } 60^\circ) = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$z' = 2_{45} = 2(\cos 45^\circ + i\text{sen } 45^\circ) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

a) $z + z' = (2 + 2\sqrt{3}i) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = (2 + \sqrt{2}) + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})i$

b) $z \cdot z' = 4_{60^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 8_{105^\circ}$

c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{4_{60^\circ}}{2_{45^\circ}} = 2_{15^\circ}$

d) $z^2 \cdot z' = (4_{60^\circ})^2 \cdot 2_{45^\circ} = 16_{120^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 32_{165^\circ}$

e) $\overline{z'} = 2_{360^\circ - 45^\circ} = 2_{315^\circ}$; luego $z^2 \cdot \overline{z'} = 16_{120^\circ} \cdot 2_{315^\circ} = 32_{435^\circ} = 32_{75^\circ}$

f) $-z = 4_{180^\circ + 60^\circ} = 4_{240^\circ}$; luego $(-z) \cdot z' = 4_{240^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 8_{285^\circ}$

22. Calcula las siguientes potencias y expresa el resultado en forma binómica:

a) $(3 - i)^4$ **b)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)_{135^\circ}\right]^3$

c) $[2(\cos 20^\circ + i \text{ sen } 20^\circ)]^3$

a) $(3 - i)^4 = 28 - 96i$

b) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)_{135^\circ}\right]^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3_{3\cdot 135^\circ} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{405^\circ} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{45^\circ} =$

$= \dfrac{1}{8}(\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{16} + \dfrac{\sqrt{2}}{16}i$

c) $[2(\cos 20^\circ + i \text{ sen } 20^\circ)]^3 = 8(\cos 60^\circ + i \text{ sen } 60^\circ) = 4 + 4\sqrt{3}i$

23. Calcula y representa las siete primeras potencias del número $z = -1 + i$

z en polares es $z = \sqrt{2}_{135^\circ}$. Sus sucesivas potencias son: $z^2 = 2_{270^\circ}$; $z^3 = 2\sqrt{2}_{45^\circ}$; $z^4 = 4_{180^\circ}$; $z^5 = 4\sqrt{2}_{315^\circ}$; $z^6 = 8_{90^\circ}$ y $z^7 = 8\sqrt{2}_{225^\circ}$. Gráficamente:

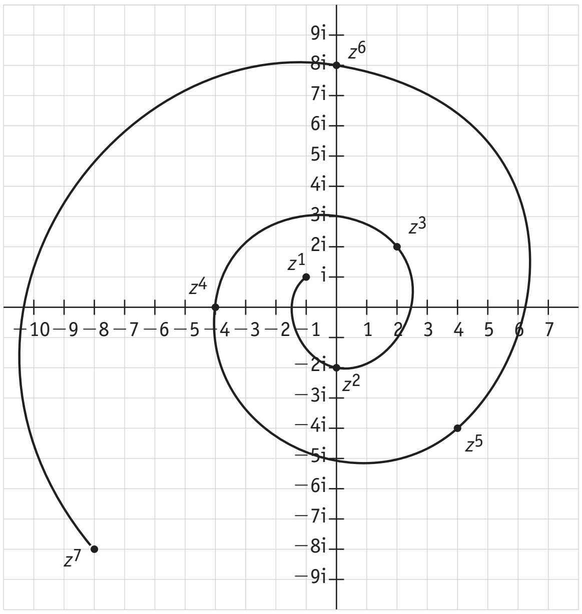


Fig. 9.7.

24. Halla las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **b)** $\sqrt[6]{\dfrac{1-2i}{2+i}}$

a) Las raíces cúbicas de $\dfrac{1-i}{1+i}$ son: i, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ y $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

b) $\sqrt[6]{\dfrac{1-2i}{2+i}} = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ + k\cdot 360}{6}} = 1_{45^\circ + k\cdot 60}$.

Luego las raíces sextas de $\dfrac{1-2i}{2+i}$ son: 1_{45°, 1_{105°, 1_{165°, 1_{225°, 1_{285° y 1_{345°.

25. Si $z = (\sqrt{2})_{75^\circ}$ y $z' = 4 + 4i$, calcula $\sqrt[3]{z \cdot z'}$.

En forma polar, $z'=(4\sqrt{2})_{45^\circ}$, luego $z\cdot z'=(\sqrt{2})_{75^\circ}\cdot(4\sqrt{2})_{45^\circ}=8_{120^\circ}$.
Por tanto, $\sqrt[3]{z\cdot z'}=\sqrt[3]{8_{120^\circ}}=2_{60^\circ+k\cdot 120^\circ}$.
Dando a k los valores 0, 1 y 2 se obtienen las raíces cúbicas: 2_{60°, 2_{180° y 2_{240°.

26. Calcula y expresa en forma binómica $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+i^{101}}{1+i^{203}}\right)^2}$.

Recordando las potencias de i, será: $i^{101}=i^{4\cdot 25+1}=i^1=i$; $i^{203}=i^{4\cdot 50+3}=i^3=-i$. Luego

$$\frac{1+1^{101}}{1+i^{203}}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1+1^{101}}{1+i^{203}}\right)^2=i^2=-1.$$

Por tanto

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1+i^{101}}{1+i^{203}}\right)^2}=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=\begin{cases}1_{60^\circ}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 1_{180^\circ}=-1\\ 1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

27. Calcula y dibuja las raíces octavas de la unidad.

$\sqrt[8]{1}=\sqrt[8]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{8}}$ $(k=0,1,\ldots,7)$. Sustituyendo k por estos valores, obtenemos 1_{0°, 1_{45°, 1_{90°, 1_{135°, 1_{180°, 1_{225°, 1_{270° y 1_{315°.

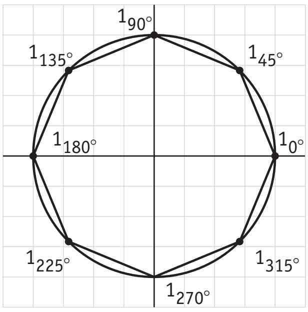


Fig. 9.8.

28. Utilizando números complejos, calcula sen 3α y cos 3α en función de sen α y cos α.

Por la fórmula de Moivre, para $n=3$,
$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\,\text{sen}\,3\alpha$. Desarrollando el primer miembro, $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^3=$
$=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha-3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha-i\,\text{sen}^3\alpha$
e igualando las partes real e imaginaria de ambas expresiones, obtenemos:
$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$ y
$\text{sen}\,3\alpha=3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}^3\alpha$.

29. Utilizando números complejos, calcula sen 4α y cos 4α en función de sen α y cos α.

Por la fórmula de Moivre, para $n=4$,
$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^4=\cos 4\alpha+i\,\text{sen}\,4\alpha$. Desarrollando el primer miembro, $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^4=$
$=\cos^4\alpha+4i\cos^3\alpha\,\text{sen}\,\alpha-6\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha-4i\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha+\text{sen}^4\alpha$
e igualando las partes real e imaginaria de ambas expresiones, obtenemos:
$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^4\alpha$ y
$\text{sen}\,4\alpha=4\cos^3\alpha\,\text{sen}\,\alpha-4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$.

30. Utilizando números complejos, calcula el seno y el coseno de 105º (observa que 105º = 60º + 45º).

Por una parte se tiene que $1_{60^\circ}\cdot 1_{45^\circ}=1_{105^\circ}=$
$=1(\cos 105^\circ+i\,\text{sen}\,105^\circ)=\cos 105^\circ+i\,\text{sen}\,105^\circ$.
Por otra parte, $1_{60^\circ}\cdot 1_{45^\circ}=$
$=1(\cos 60^\circ+i\,\text{sen}\,60^\circ)\cdot 1(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}\,45^\circ)=$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}i^2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$$

Igualando partes real e imaginaria de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 105^\circ=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{sen}\,105^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Tipo III. Ecuaciones con coeficientes complejos

31. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:
a) $2-i$ y $2+i$
b) $\sqrt{2}_{45^\circ}$, $\sqrt{2}_{315^\circ}$ y 3_{90°
c) 2, −3, i y $-i$

a) $[z-(2-i)]\cdot[z-(2+i)]=0\Leftrightarrow z^2-4z+5=0$.
b) $\sqrt{2}_{45^\circ}=1+i$; $\sqrt{2}_{315^\circ}=1-i$ y $3_{90^\circ}=3i$, luego la ecuación es
$[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]\cdot(z-3i)=0\Leftrightarrow$
$(z^2-2z+2)\cdot(z-3i)=0\Leftrightarrow$
$z^3+(-2-3i)z^2+(2+6i)z-6i=0$.
c) $(z-2)\cdot(z+3)\cdot(z-i)\cdot(z+i)=0\Leftrightarrow$
$z^4+z^3-5z^2+z-6=0$.

32. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:
a) $z^2-2z+5=0$
b) $z^4-256=0$
c) $z^4+2z^2+2=0$
d) $z^4+(1-\sqrt{3}i)=0$.

a) $z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$

b) $z^4-256=0\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{256_{0^\circ}}=4_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=$
$=4_{0^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Las soluciones son: 4, $4i$, -4 y $-4i$,

c) $z^4+2z^2+2=0\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

- Si $z^2=-1+i\ \Rightarrow z=\sqrt{-1+i}=\sqrt{\sqrt{2}_{135^\circ}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{135^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$

cuyas soluciones son $(\sqrt[4]{2})_{67^\circ 30'}$ y $(\sqrt[4]{2})_{247^\circ 30'}$

- Si $z^2=-1-i \Rightarrow z=\sqrt{-1-i}=\sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{225^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$ cuyas soluciones son $(\sqrt[4]{2})_{112^\circ 30'}$ y $(\sqrt[4]{2})_{292^\circ 30'}$

d) $z^4+(1-\sqrt{3}i)=2 \Leftrightarrow z^4=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow$
$\Rightarrow z=\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{120^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=(\sqrt[4]{2})_{30^\circ+k\cdot 90^\circ}$

Las soluciones son: $z_1=(\sqrt[4]{2})_{30^\circ}$; $z_2=(\sqrt[4]{2})_{120^\circ}$; $z_3=(\sqrt[4]{2})_{210^\circ}$ y $z_4=(\sqrt[4]{2})_{300^\circ}$.

33. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^5-1=0$ **b)** $z^3+8=0$ **c)** $z^4+8+8\sqrt{3}i=0$
d) $z^4-i^{25}=0$ **e)** $z^6+7z^3-8=0$

a) $z=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{5}}=1_{k\cdot 72^\circ}$. Luego las soluciones son: 1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216° y 1_{288°.

b) $z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_{180^\circ}}=2_{\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=2_{60^\circ+k\cdot 120^\circ}$. Luego las soluciones son: 2_{60°; 2_{180° y 2_{300°

c) $z=\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{16_{240^\circ}}=2_{\frac{240^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=2_{60^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Luego las soluciones son: 2_{60°; 2_{150°; 2_{240° y 2_{330°.

d) $z^4-i^{25}=0 \Leftrightarrow z^4-i=0 \Leftrightarrow z^4=i \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{i}=$
$=\sqrt[4]{1_{90^\circ}}=1_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}$; las soluciones son $1_{22^\circ 30'}$; $1_{112^\circ 30'}$; $1_{202^\circ 30'}$ y $1_{292^\circ 30'}$.

e) $z^6+7z^3-8=0$. Si hacemos $z^3=t$, la ecuación se transforma en una de segundo grado: $t^2+7t-8=0$, de fácil solución. $t^2+7t-8=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+8)=0$. La ecuación inicial, por tanto, se puede escribir: $z^6+7z^3-8=0 \Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+8)=0$. Ahora, las soluciones de $z^3+1=0$ son: 1_{0°, 1_{120° y 1_{240°; las de $z^3+8=0$ son: 2_{60°, 2_{180° y 2_{300°.

34. Resuelve la ecuación $3z+3i-1=\dfrac{-z+3iz-12}{z}$.

Quitando denominadores, la ecuación es equivalente a:
$3z^2+3iz-z=-z+3iz-12 \Leftrightarrow 3z^2=-12 \Leftrightarrow$
$z^2=-4 \Rightarrow z=\sqrt{-4}=\pm 2i$

35. El número $\sqrt{3}+i$ es la raíz cúbica de un número complejo z. Halla la forma binómica de dicho número y de las otras raíces cúbicas.

Si $\sqrt{3}+i=\sqrt[3]{z} \Rightarrow z=(\sqrt{3}+i)^3$, luego el número buscado es $z=(\sqrt{3}+i)^3=8i$.

Las raíces cúbicas de z son: $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8_{90^\circ}}=2_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=2_{30^\circ+k\cdot 120^\circ}$

En forma binómica, $2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$, $2_{150}=-\sqrt{3}+i$ y $2_{270^\circ}=-2i$.

36. El número $-2i$ es una raíz quinta de un número complejo. Calcula las otras raíces y el número.

$-2i=\sqrt[5]{z} \Rightarrow z=(-2i)^5=-32i^5=-32i=32_{270^\circ}$. Las otras raíces son: $\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{270^\circ}}=2_{\frac{270^\circ+k\cdot 360^\circ}{5}}=2_{54^\circ+k\cdot 72^\circ}$ es decir, 2_{54°, 2_{126°, 2_{198°, 2_{270° y 2_{342°.

37. Halla dos números complejos cuya suma sea $3-8i$ y su producto $-13-12i$.
(*Recuerda:* una ecuación de 2º grado es de la forma $z^2-Sz+P=0$, donde S y P son, respectivamente, la suma y el producto de las soluciones).

Los números buscados son las soluciones de la ecuación

$z^2-(3-8i)z+(-13-12i)=0$, es decir, $z_1=\dfrac{3}{2}-\left(4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ y

$z_2=\dfrac{3}{2}-\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$.

38. Determina los números complejos cuyo inverso sea igual al cuádruple de su opuesto.

Si z es uno de dichos números, la condición del enunciado es que $\dfrac{1}{z}=4(-z) \Rightarrow 1=-4z^2 \Leftrightarrow 4z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{1}{4}$.

Los números buscados son $z=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}i$.

39. El producto de dos números complejos $-6i$ y la suma de sus cuadrados 5. Calcúlalos.

Si los números son z y z' se verifica: $\begin{cases} z\cdot z'=-6i \\ z^2+(z')^2=; \end{cases}$

de la primera, $z'=\dfrac{-6i}{z}$ y sustituyendo en la segunda,

$z^2+\left(\dfrac{-6i}{z}\right)^2=5 \Leftrightarrow z^2-\dfrac{36}{z^2}=5 \Leftrightarrow z^4-5z^2-36=0 \Rightarrow z=\pm 3$

o $z=\pm 2i$. Sustituyendo estos valores en $z'=\dfrac{-6i}{z}$, se obtiene

que los números buscados son $\begin{cases} z=3 \\ z'=-2i \end{cases}$ o $\begin{cases} z=-3 \\ z'=2i \end{cases}$.

40. El producto de dos números es $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y su cociente $\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i$. Calcúlalos.

Sean z_1 y z_2 los números buscados. Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i. \end{cases}$$

Despejando z_1 en la segunda ecuación es $z_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i\right)z_2$;

llevando esta expresión a la primera ecuación, se tiene que

$$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i\right)z_2\cdot z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$$

$$z_2^2=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}i=9_{30^\circ}$$

Luego $z_2=\sqrt{9_{30^\circ}}=3_{\frac{30^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$. Llevando cada uno de estos valores a la relación $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{18}i\right)z_2$ obtenemos que dos pares de soluciones. Son:

- Si $z_2=3_{15^\circ}$ es $z_1=\left(\frac{1}{3}\right)_{45^\circ}$
- Si $z_2=3_{195^\circ}$ es $z_1=\left(\frac{1}{3}\right)_{225^\circ}$

41. Halla dos números complejos sabiendo que su producto vale $2i$ y que el cubo de uno dividido por el otro es 2.

Sean z_1 y z_2 los números buscados. Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=2i \\ \dfrac{(z_1)^3}{z_2}=2 \end{cases}$$

Despejando z_2 en la primera es $z_2=\frac{2i}{z_1}$; llevando a la segunda obtenemos la ecuación $z_1^4=4i \Leftrightarrow z_1^4=4_{90^\circ}$.
Luego $z_1=\sqrt[4]{4_{90^\circ}}=(\sqrt{2})_{\frac{90^\circ+k\cdot 360}{4}}$. Llevando cada uno de estos valores a la relación $z_2=\frac{2i}{z_1}$ obtenemos los cuatro pares de soluciones. Son:

- Si $z_1=\sqrt{2}_{22^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{67^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{112^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{337^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{202^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{247^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{292^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{157^\circ 30'}$

42. Halla la longitud de los lados y el área del cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de la ecuación $z^4+16=0$.

Las soluciónes de la ecuación $z^4+16=0$ son $z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^\circ}}=2_{45^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Por tanto, los vértices del cuadrilátero son los afijos de los números 2_{45°, 2_{135°, 2_{225° y 2_{315°. Dichos afijos, que están situados sobre una circunferencia de radio 2, forman un polígono regular, luego el cuadrilátero es un cuadrado. Su diagonal d, que es el diámetro de la circunferencia, mide $d=4$. Si l es el lado del cuadrado es $d=l\sqrt{2}$, luego $l=\frac{4}{\sqrt{2}}$ y por tanto, el área vale $A=l^2=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=8u^2$.

43. Calcula el área del pentágono cuyos vértices son los afijos de las soluciones de la ecuación $z^5-1=0$.

Las soluciones de la ecuación son los números $1_{72^\circ\cdot k}$. Al unir cada afijo con el origen de coordenadas obtenemos cinco triángulos isósceles e iguales entre sí. En cada uno de ellos, los lados iguales miden 1 (el radio de la circunferencia) y el lado desigual, que es el lado del pentágono, lo calculamos por la relación $\text{sen } 36^\circ=\frac{l/2}{1} \Rightarrow l=2\cdot\text{sen}36^\circ=1{,}18$ u.

Como $\cos 36^\circ=\frac{h}{1}$, la altura de cada triángulo vale $h=0{,}81$.

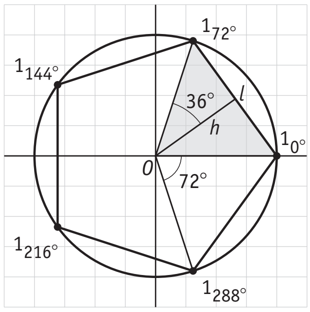


Fig. 9.9.

Por tanto, el área de cada triángulo es $A_T=\frac{l\cdot h}{2}\approx 0{,}48$ u² y, por último, el área del pentágono es $S=5\cdot A_T=2{,}4\ u^2$.

44. Los afijos de dos números complejos conjugados y el origen de coordenadas determinan un triángulo. Calcula esos dos números para que el triángulo sea equilátero de área $3\sqrt{3}$.

Si un número es $z=a+bi$, el otro es $\bar{z}=a-bi$. Para que el triángulo sea equilátero, $\sqrt{a^2+b^2}=2b$.

El área es $S=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{2b\cdot a}{2}=ba$, que como ha de valer $3\sqrt{3}$ se obtiene otra ecuación: $ab=3\sqrt{3}$. Obtenemos, por tanto, el sistema $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=2b \\ ab=3\sqrt{3}\end{cases}$ que podemos poner $\begin{cases}a^2+b^2=4b^2 \\ a^2b^2=27\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2=3b^2 \\ a^2b^2=27\end{cases}$.

Sustituyendo la 1ª en la 2ª se obtiene $b^4=9 \Leftrightarrow b^2=3 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$ y, por tanto, $a=\pm 3$. Los números buscados son: $z=3+\sqrt{3}i$ y $\bar{z}=3-\sqrt{3}i$ o $z=-3-\sqrt{3}i$ y $\bar{z}=-3+\sqrt{3}i$.

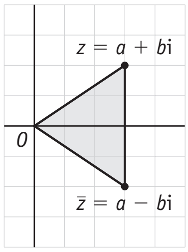


Fig. 9.10.

45. Un cuadrado con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto $A(1, 2)$. Calcula los demás vértices.

Sean B, C y D los otros vértices. Dado que los lados de un cuadrado forman entre sí ángulos de 90º, para calcular B, tendremos que aplicar un giro de 90º al vértice $A(1, 2)$. Si giramos 90º este vértice B obtendremos C y si a C, lo giramos 90º más, obtendremos D. Y como sabemos, girar 90º equivale a multiplicar por i el afijo correspondiente. Así:
B es el afijo de $(1+2i)\cdot i=-2+i$. Es decir $B(-2, 1)$.
C es el afijo de $(-2+i)\cdot i=-1-2i$. Es decir $C(-1, -2)$.
D es el afijo de $(-1-2i)\cdot i=2-i$. Es decir $D(2, -1)$.

46. Un hexágono con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto *A*(1, 1). Calcula los demás vértices.

El punto *A*(1, 1) es el afijo del número $(\sqrt{2})_{45°}$. Cada vértice se obtiene del anterior girándolo 60º. O lo que es lo mismo, multiplicando por $1_{60°}$ el número que representa su afijo. Así *B* es el afijo del número $(\sqrt{2})_{45°} \cdot 1_{60°} = (\sqrt{2})_{105°}$; *C* es el afijo del número $(\sqrt{2})_{105°} \cdot 1_{60°} = (\sqrt{2})_{165°}$; *D* es $(\sqrt{2})_{165°} \cdot 1_{60°} = (\sqrt{2})_{225°}$; *E* es $(\sqrt{2})_{225°} \cdot 1_{60°} = (\sqrt{2})_{285°}$ y *F* es $(\sqrt{2})_{285°} \cdot 1_{60°} = (\sqrt{2})_{345°}$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. El conjugado del opuesto de $z = 3 - 4i$ es:
a) $-3 - 4i$ b) $3 + 4i$ c) $-3 + 4i$

a) $-3 - 4i$

2. El resultado de la operación $2(2 - 3i) - i(3 + 4i)$ es:
a) $-9i$ b) $8 - 9i$ c) $7 - 10i$

b) $8 - 9i$

3. El producto de dos números complejos conjugados es un número:
a) real b) imaginario puro

a) real

4. Halla el inverso de $3 + i$:

$\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

5. El número $1 + i^{5015}$ es igual que:
a) 0 b) $1 + i$ c) $1 - i$

c) $1 - i$

6. La forma polar del número $3 - \sqrt{3}i$ es:
a) $\sqrt{12}_{60°}$ b) $\sqrt{12}_{300°}$ c) $\sqrt{6}_{300°}$

b) $\sqrt{12}_{300°}$

7. El producto $2_{30°} \cdot 4_{30°}$ vale:
a) 8(cos 60º + *i*sen 60º)
b) 8(cos 30º + *i*sen 30º)
c) 8(cos 900º + *i*sen 900º)

a) 8(cos 60º + *i*sen 60º)

8. Con ayuda de la representación gráfica contesta: ¿multiplicar por *i* equivale a efectuar...
a) un giro de 90º?
b) un giro de 180º?

a) un giro de 90º

9. Las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 26 = 0$ son:
a) $2 + i$ y $2 - i$, b) $1 - 5i$ y $1 + 5i$ c) $5 - i$ y $5 + i$

b) $1 - 5i$ y $1 + 5i$

10. Las raíces cúbicas de −8, $\sqrt[3]{-8}$, son:
a) $2_{180°}$, $2_{270°}$ y 2_{360} b) $2_{30°}$, $2_{150°}$ y $2_{270°}$
c) $2_{60°}$, $2_{180°}$ y $2_{300°}$

c) $2_{60°}$, $2_{180°}$ y $2_{300°}$

2 cuestiones para investigar

1. Las raíces de la ecuación $z^2 - 1 = 0$ (que son +1 y −1 y se llaman *raíces cuadradas de la unidad*) suman 0 y su producto vale −1. Igualmente, las *raíces cúbicas de la unidad* (es decir las soluciones de la ecuación $z^3 - 1 = 0$) suman 0, pero su producto vale +1.
a) ¿Qué pasa con las raíces cuartas de la unidad?
b) ¿Y con las raíces de la ecuación $z^5 - 1 = 0$?

a) Las raíces de $z^4 - 1 = 0$ son +1, −1, *i* y −*i*. Su suma es 0 y su producto +1.

b) Las raíces de esta ecuación son *las raíces quintas de la unidad*, es decir los números complejos $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_{0°}} = 1_{\frac{0°+360°\cdot k}{5}} = 1_{72°\cdot k}$ (con $k = 0, 1, 2, 3, 4$). Estas cinco raíces son los números: $1_{0°}$; $1_{72°}$; $1_{144°}$; $1_{216°}$ y $1_{288°}$.

- Su suma vale: $1_{0°} + 1_{72°} + 1_{144°} + 1_{216°} + 1_{288°} = 1_{0°} + 1_{72°} + (1_{72°})^2 + (1_{72°})^3 + (1_{72°})^4$ (obsérvese que estos números forman progresión geométrica de razón $r = 1_{72°}$, luego puede aplicarse la fórmula $S = \frac{a_n \cdot r \cdot a_1}{r - 1}$). Por tanto, la suma pedida vale $S = \frac{(1_{72°})^4 \cdot 1_{72°} - 1_{0°}}{1_{72°} - 1} = \frac{1_{288°} \cdot 1_{72°} - 1_{0°}}{1_{72°} - 1} = \frac{1_{360°} - 1_{0°}}{1_{72°} - 1} = \frac{1_{0°} - 1_{0°}}{1_{72°} - 1} = \frac{0}{1_{72°} - 1} = 0$. Es decir, *la suma vale cero*.
- Su producto vale: $1_{0°} \cdot 1_{72°} \cdot 1_{144°} \cdot 1_{216°} \cdot 1_{288°} = 1_{0°+72°+144°+216°+288°} = 1_{720°} = 1_{0°} = 1$.
  Es decir, *el producto vale 1*.

2. En 1904 el matemático Helge von Koch dio a conocer la que posteriormente se conoció como *curva de Koch* o *copo de nieve*. En 1975 Mandelbrot designó con la palabra fractal a este tipo de curvas. Él mismo consiguió unas imágenes maravillosas al iterar, con ayuda de ordenadores, la función compleja $f(z) = z^2 + c$. Investiga sobre los fractales (y sorpréndete con sus imágenes) en la dirección: http://www.arrakis.es/~sysifus/intro.html. También merece la pena visitar: http://www.geocities.com/capecanaveral/cockpit/5889/cuerpos.html.

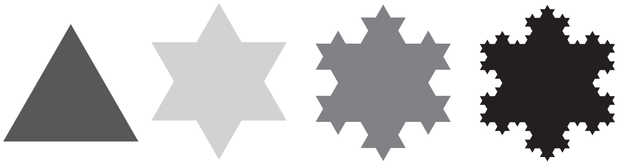


Fig. 9.11.

Actividades

1. **Determina un vector unitario con la misma dirección que $\vec{u}(2, -5)$.**

El módulo de $\vec{u}$ es $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$.
El vector $\vec{v}=\frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{29}}\cdot(2,-5)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$
tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y es unitario pues $|\vec{v}|=$
$=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2+\left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{29}+\frac{25}{29}}=\sqrt{\frac{29}{29}}=1$
Otra solución es $\vec{v}=\left(\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$

2. **Encuentra un vector $\vec{v}$, de módulo 2, ortogonal a $\vec{u}(-1, 2)$.**

Si $\vec{v}\ (x, y)$, por ser ortogonal a $\vec{u}$ será $\vec{v}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow -x+2y=0$ $\Leftrightarrow x=2y$. Si $\vec{v}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2^2 \Leftrightarrow \sqrt{(2y)^2+y^2}=2 \Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x=\frac{4}{\sqrt{5}}$. El vector buscado es $\vec{v}=\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
También es solución el vector $\vec{v}=\left(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.

3. **Dada la recta $r: 2x-y+1=0$, halla sus otras ecuaciones.**

Un vector director de r es $\vec{u}(1, 2)$. Para determinar uno de sus puntos damos un valor a x, por ejemplo $x=0$, y obtenemos, sustituyendo en $2x-y+1=0$, el valor $y=1$. Luego la recta pasa por A(0, 1). Sus diferentes ecuaciones son:

- Paramétricas: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases}$
- Continua: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}$

Punto–pendiente: $y-1=2(x-0)$. O, simplemente, $y-1=2x$
Explícita: $y=2x+1$.

4. **Dos lados de un paralelogramo están situados sobre las rectas $r: 2x+y+2=0$ y $s: x-y-2=0$. Un vértice es el punto $P(1, 2)$. Determina las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.**

Como $P\notin r$ y $P\notin s$, las rectas buscadas son las paralelas a éstas, r' y s', que pasan por P.
Así: $r': 2x+y-4=0$; $s': x-y+1=0$.

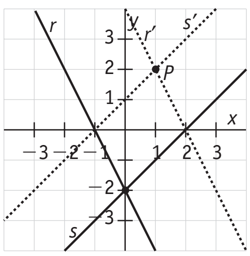


Fig. 10.1.

5. **Dado el triángulo de vértices $A(3, 2)$, $B(2, -1)$ y $C(0, 4)$ halla la ecuación de la altura correspondiente al vértice A. (*Recuerda:* la altura es perpendicular al lado opuesto.)**

La recta que pasa por B y C es $r: 5x+2y-8=0$. La altura correspondiente al vértice A, h_a, es la perpendicular a r por el punto A. Luego $h_a: 2x-5y+4=0$.

6. **El punto $P(-2, 3)$ es vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está sobre la recta $r: 2x-y+7=0$. Encuentra la ecuación de la diagonal que pasa por este vértice si se sabe que tiene pendiente positiva *(recuerda que la diagonal y el lado de un cuadrado forman un ángulo de 45º)*.**

El punto P es de r. Sea s la recta buscada; r tiene como pendiente $m_r=2$. Sustituyendo en la fórmula $\text{tg}\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$, dado que tg 45º = 1, se obtiene: $1=\left|\frac{2-m_s}{1+2\cdot m_s}\right| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |1+2\cdot m_s|=|2-m_s| \Leftrightarrow 1+2\cdot m_s=\pm(2-m_s)$. Esta expresión da lugar a dos ecuaciones, que corresponden a dos rectas distintas:

- $1+2\cdot m_s=2-m_s$, cuya solución es $m_s=\frac{1}{3}$ y
- $1+2\cdot m_s=-(2-m_s)$, cuya solución es $m_s=-3$.

Como, por hipótesis, la diagonal tiene pendiente positiva, la solución válida es $m_s=\frac{1}{3}$.
Así, la diagonal pedida es s: $y-3=\frac{1}{3}(x+2)$.

7. **El punto $P(3, -1)$ es vértice del cuadrado que tiene uno de sus lados en la recta que pasa por los puntos $A(6, 0)$ y $B(4, 4)$. Calcula la longitud del lado y el área de dicho cuadrado.**

La recta que pasa por A y B es $r: 2x+y-12=0$. Como $A\notin r$, el lado del cuadrado es $l=d(A, r)=\frac{7}{\sqrt{5}}$ u.
El área es $S=l^2=\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{49}{5}u^2$.

Problemas propuestos

Tipo I. Vectores

1. **Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(2, -1)$ y es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}(-1, 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo.**

Si el extremo es $B(x, y)$, será $\overrightarrow{AB}=(x-2, y+1)$.
Si es equipolente a $\overrightarrow{CD}(-1, 4) \Rightarrow \begin{cases} x-2=-1 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.
Luego B(1, 3). El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}u$.

2. **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(1, -3)$, $B(2, 2)$ y $C(-3, 0)$. Calcula las coordenadas del cuarto vértice.**

Si D(x, y) es el cuarto vértice, será $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (x+3,\ y) = (-1,\ -5) \Rightarrow \begin{cases} x+3=-1 \\ y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow D(-4,\ -5)$

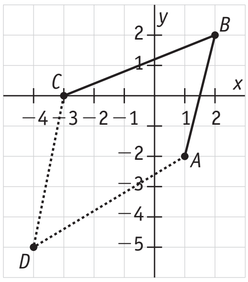


Fig. 10.2.

3. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento de extremos $A(2,\ 3)$ y $B(-3,\ 4)$ en:
a) tres partes iguales,
b) cuatro partes iguales.

a) Sean $P(x, y)$ y $Q(x', y')$ los puntos buscados. Es $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ $(x-2,\quad y-3)=\dfrac{1}{3}(-5,\quad 1) \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{10}{3}\right)$. Análogamente, será $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x'-2,\ y'-3)=\dfrac{2}{3}(-5,\ 1)$ $\Rightarrow Q\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{11}{3}\right)$.

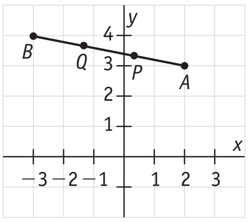


Fig. 10.3.

b) Se puede hacer como el apartado anterior o, también, dividiendo el segmento AB por la mitad: Si M es el punto medio del segmento AB, $M\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$. Ahora, R es el punto medio del segmento AM, luego $R\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{13}{4}\right)$ y S es el punto medio del segmento MB, luego $S\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{15}{4}\right)$.

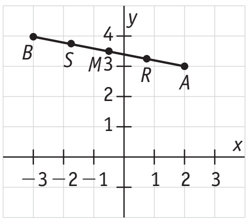


Fig. 10.4.

4. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=\dfrac{1}{4};\ (\vec{u},\vec{v})=60^\circ$

b) $|\vec{u}|=3,\ |\vec{v}|=(2,-3);\ (\vec{u},\vec{v})=45^\circ$

c) $\vec{u}=\left(3,\dfrac{1}{2}\right),\ \vec{v}=(-1,3)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\cos 60^\circ=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

b) $|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$, luego $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot\sqrt{13}\cdot\cos 45^\circ =$ $=3\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-1)+\dfrac{1}{2}\cdot 3=-\dfrac{3}{2}$

5. Si $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=\dfrac{1}{3}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, calcula:

a) $\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$

b) $(\vec{u}-5\vec{v})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})$

a) $\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})=3\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=3\cdot 3-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{80}{9}$

b) $(\vec{u}-5\vec{v})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-10\ \vec{u}\cdot\vec{v}+25\ \vec{u}\cdot\vec{v}=$ $=4-10\cdot 3+25\cdot\dfrac{1}{9}=-\dfrac{209}{9}$

6. Dados los vectores $\vec{u}(1,\ -2)$, $\vec{v}(3,\ 1)$ y $\vec{w}(2,\ 0)$,

a) calcula las coordenadas del vector $2\vec{u}-\vec{v}+\dfrac{1}{3}\vec{w}$,

b) expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$,

c) calcula los ángulos que forman dos a dos,

d) halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$,

e) halla un vector unitario y perpendicular a $\vec{v}$.

a) $2\vec{u}-\vec{v}+\dfrac{1}{3}\vec{w}=2(1,\ -2)-(3,\ 1)+\dfrac{1}{3}(2,\ 0)=\left(-\dfrac{1}{3},-5\right)$

b) $(2,\ 0)=x\ (1,\ -2)+y\,(3,\ 1) \Rightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ -2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{7} \\ y=\dfrac{4}{7} \end{cases}$.

Luego $\vec{w}=\dfrac{2}{7}\vec{u}+\dfrac{4}{7}\vec{v}$

c) Como $|\vec{u}|=\sqrt{5},\ |\vec{v}|=\sqrt{10}$ y $|\vec{w}|=2$; por otra parte, $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=2$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=6$. Luego

$\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})=81^\circ\,52'\,12''$

$\cos(\vec{u},\vec{w})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot 2} \Rightarrow (\vec{u},\vec{w})=63^\circ\,26'\,6''$

$\cos(\vec{v},\vec{w})=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\dfrac{6}{\sqrt{10}\cdot 2} \Rightarrow (\vec{v},\vec{w})=18^\circ\,26'\,6''$

d) Si $\vec{x}$ es el vector buscado, por tener la misma dirección que $\vec{u}$, será $\vec{x}=\alpha\ \vec{u}=(\alpha,\ -2\alpha)$ de módulo $|\vec{x}|=\sqrt{\alpha^2+(-2\alpha)}=\sqrt{5\alpha^2}$. Si ha de ser $|\vec{x}|=\sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20}=\sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow 5\alpha^2=20 \Rightarrow \alpha=\pm 2$.

Hay dos vectores, el $\vec{x}_1=(2,\ -4)$ y el $\vec{x}_2=(-2,\ 4)$.

e) Si $\vec{y}(a,\ b)$ es el vector buscado, por ser perpendicular a $\vec{v}$, verifica que $\vec{v}\cdot\vec{y}=0 \Leftrightarrow (3,\ 1)\cdot(a,\ b)=0 \Leftrightarrow 3a+b=0 \Rightarrow b=-3a$. Luego $\vec{y}(a,\ -3a)$. Si, además, ha de ser unitario $|\vec{y}|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+(-3a)^2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{10a^2}=1 \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Hay, también, dos vectores: el $\vec{y}_1=\left(\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ y el $\vec{y}_2=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

7. Dados los vectores $\vec{u}=(1,\ 2)$ y $\vec{v}=(-3,\ 1)$:

a) Comprueba que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de los vectores libres del plano.

b) Encuentra las componentes del vector $\vec{w}=(-1,\ 5)$ en la base $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$.

a) Basta comprobar que no son paralelos. Y, efectivamente, $\frac{1}{-3}\neq\frac{2}{1}$.

b) Si $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v} \Leftrightarrow (-1,\ 5)=x(1,\ 2)+y(-3,\ 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Luego $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$.

8. Si $\vec{u}(2,\ a)$ y $\vec{v}(1,\ -4)$ determina el valor de a para que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares,

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$.

a) $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 2-4a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

b) $|\vec{u}|=\sqrt{4+a^2}$ y $|\vec{v}|=\sqrt{17}$. Si han de ser iguales $\sqrt{4+a^2}=\sqrt{17} \Rightarrow 4+a^2=17 \Rightarrow a=\pm\sqrt{13}$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=10 \Leftrightarrow 2-4a=10 \Rightarrow a=-2$.

9. Sea $\vec{u}(3,-2)$. Calcula:

a) un vector $\vec{x}$ unitario y con la misma dirección que $\vec{u}$,

b) un vector $\vec{y}$, perpendicular a $\vec{u}$ y con el mismo módulo que $\vec{u}$,

a) Si $\vec{x}$ es el vector buscado, por tener la misma dirección que $\vec{u}$, será $\vec{x}=\alpha\,\vec{u}=(3\alpha,\ -2\alpha)$ de módulo $|\vec{x}|=\sqrt{13\alpha^2}$.

Si ha de ser unitario $|\vec{x}|=1 \Rightarrow 13\alpha^2=1 \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Hay dos vectores, el $\vec{x}_1=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y el $\vec{x}_2=\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13},\ \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

b) Si $\vec{y}(a,\ b)$ es el vector buscado, por ser perpendicular a $\vec{u}$, será $\vec{u}\cdot\vec{y}=0 \Leftrightarrow 3a-2b=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2}a$.

Luego $\vec{y}=\left(a\ ,\ \frac{3}{2}a\right)$ de módulo $|\vec{y}|=\sqrt{\frac{13}{4}a^2}$. Si $|\vec{u}|=|\vec{y}| \Rightarrow \sqrt{13}=\sqrt{\frac{13}{4}a^2} \Rightarrow a=\pm 2$. Hay, también, dos vectores: el $\vec{y}_1=(2,\ 3)$ y el $\vec{y}_2=(-2,\ -3)$.

10. Si $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ y $(\vec{u},\ \vec{v})=60º$ calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.

a) Como $\vec{u}\cdot\vec{u}=9$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot 4\cdot\cos 30º=6$ y $\vec{v}\cdot\vec{v}=16$, será $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{37}$.

b) Análogamente, $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}=$
$=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{13}$.

11. Dados los vectores $\vec{u}(3,\ a)$ y $\vec{v}(5,\ 5)$ determina el valor de a para que formen un ángulo de 45º.

Como $|\vec{u}|=\sqrt{9+a^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=15+5a$ será

$$\cos(\vec{u},\ \vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{15+5a}{\sqrt{9+a^2}\ 5\sqrt{2}}=\cos 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{15+5a}{\sqrt{9+a^2}\ 5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a=0$$

12. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales y de módulo 1, hallar los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u}+a\vec{v}$ y $\vec{u}-a\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

Como $\vec{u}\cdot\vec{u}=1$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ y $\vec{v}\cdot\vec{v}=1$, será
$(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})=1-a^2$.

También $|\vec{u}+a\vec{v}|=\sqrt{(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}+a\vec{v})}=\sqrt{1+a^2}$ y
$|\vec{u}-a\vec{v}|=\sqrt{(\vec{u}-a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})}=\sqrt{1+a^2}$

$$\text{Luego}\cos(\vec{u}+a\vec{v},\ \vec{u}+a\vec{v})=\frac{(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})}{|\vec{u}+a\vec{v}|\cdot|\vec{u}-a\vec{v}|}=\frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\ \sqrt{1-a^2}}=$$

$$=\cos 60º=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\ \sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1-a^2}{1+a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2=1\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

13. Sea ABC un triángulo isósceles cuyos lados iguales AB y AC miden 5 cm y forman un ángulo de 120º. Si M, N y P son los puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente, calcula:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}$ **b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$**

c) $\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NC}$ **d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$**

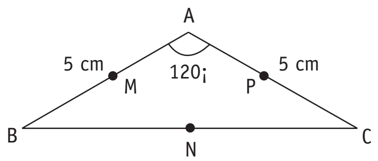


Fig. 10.5.

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AM}|\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM})=5\cdot\frac{5}{2}\cdot\cos 120º=-\frac{25}{4}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})=5\cdot5\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{25}{2}$

c) Como $\left|\overrightarrow{NB}\right|=\left|\overrightarrow{NC}\right|=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, será $\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NC}=$

$=\left|\overrightarrow{NB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{NC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{NB},\ \overrightarrow{NC})=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 180^\circ=-\dfrac{75}{4}$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP})=5\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\cos 0^\circ=\dfrac{25}{2}$

14. a) Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados *AC* y *AB* del triángulo *A*(1, −2), *B*(−2, 2) y *C*(2, 3) es paralelo al lado *BC* y de longitud su mitad.
b) Comprueba que para cualquier triángulo *ABC*, el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y de longitud su mitad.

a) Si *M*, *N* y *P* son, respectivamente, los puntos medios de los lados *AB*, *BC* y *AC* es $M\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $N\left(0\ ,\ \dfrac{5}{2}\right)$ y $P=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Además, $\overrightarrow{BC}=(4,\ 1)$ y $\overrightarrow{MP}=\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ o lo que es lo mismo $\overrightarrow{MP}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$ y de módulo la mitad.

Análogamente $\overrightarrow{BA}=(3,\ -4)$ y $\overrightarrow{NP}=\left(\dfrac{5}{2},\ -2\right)$ y, por tanto, $\overrightarrow{NP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Y $\overrightarrow{AC}=(1,\ 5)$ y $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$; es decir, $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

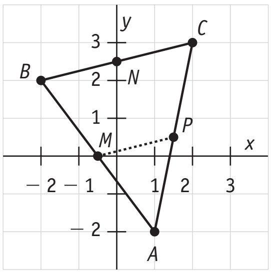


Fig. 10.6.

b) Comprobemos, por ejemplo, que $\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Como *P* es el punto medio de *AC* es $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{PC}$; análogamente como *N* es el punto medio de *CB* es $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CN}$.

Así, la relación $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ puede escribirse

$2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow 2(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AB}\Rightarrow 2\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow \overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

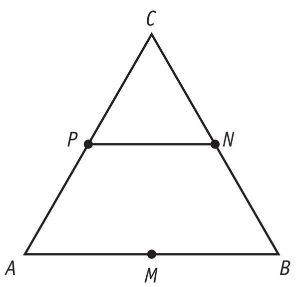


Fig. 10.7.

Tipo II. Determinación de rectas. Posición relativa. Perpedicularidad

15. Escribe todas las ecuaciones de la recta que:
a) pasa por *A*(−1, 2) y tiene por vector director el $\vec{u}$(3, −5),
b) pasa por los puntos *A*(3, −1) y *B*(2, 2),
c) pasa por *A*(2, −1) y forma un ángulo de 60º con la dirección positiva del eje *OX*,
d) pasa por *A*(1, −5) y tiene por pendiente *m* = −3.

Paramétricas	Continua	General	Punto-pendiente	Explícita
$\begin{cases}x=-1+3\lambda\\y=2-5\lambda\end{cases}$	$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}$	$5x+3y-1=0$	$y-2=\dfrac{-5}{3}(x+1)$	$y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{3}$
$\begin{cases}x=3-\lambda\\y=-1+3\lambda\end{cases}$	$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}$	$3x+y-8=0$	$y+1=-3(x-3)$	$y=-3x+8$
$\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-1+\sqrt{3}\lambda\end{cases}$	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-1=0$	$y+1=\sqrt{3}(x-2)$	$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-1$
$\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-5-3\lambda\end{cases}$	$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{-3}$	$3x+y+2=0$	$y+5=-3(x-1)$	$y=-3x-2$

16. Calcula el valor del parámetro *a* para que la recta *r*: $x+ay+2=0$
a) pase por *P*(2, −1)
b) tenga pendiente *m*=−2
c) que tenga por vector director el $\vec{u}$ (3, 1)

a) $a=4$

b) $m=\dfrac{-1}{a}=-2\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{3}{a}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow a=-3$

17. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $r: 2x-y+5=0,\ s: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{1}$

b) $r: x+2y+2=0,\ s: \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{-2}$

c) $\begin{cases}x=\lambda\\y=3-5\lambda\end{cases},\ s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-5}$

d) $r: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-3},\ s: 3x+y=0$

e) $r: x-y+2=0,\ s: x-2y+3=0$

a) Se cortan en *P*(−1, 3)
b) Paralelas
c) Coincidentes
d) Paralelas
e) Se cortan en *P*(−1, 1)

18. Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: x-y-3=0,\ s: x-3y-5=0$

b) $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3},\ s: \begin{cases}x=1-\lambda\\y=2\lambda\end{cases}$

c) $r: y+3=\frac{1}{2}(x-1)$, $s: y=x+2$

a) $(r, s) = 26^\circ\, 33'\, 54''$
b) $(r, s) = 60^\circ\, 15'\, 18''$
c) $(r, s) = 18^\circ\, 26'\, 6''$

19. Determina el ángulo que forma la recta $r: 2x-3y+3=0$ con
a) el eje *OX*,
b) el eje *OY*,
c) la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

$\vec{u}_r(3, 2)$ de módulo $|\vec{u}_r| = \sqrt{13}$. Luego

a) La pendiente es $m = \text{tg}(r, OX) = \frac{2}{3}$, luego $(r, OX) = 33^\circ\ 41'\ 24''$

b) El eje *OY* tiene por ecuación $x=0$ y vector director el $\vec{w}(0, 1)$.
Luego $\cos(r, OY) = \left|\frac{2}{\sqrt{13}}\right| \Rightarrow (r, OX) = 56^\circ\ 18'\ 36''$.

c) La bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene por ecuación $s: x-y=0$ y vector director $\vec{v}(1, 1)$. Luego $\cos(r, s) = \left|\frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{2}}\right| \Rightarrow (r, s) = 11^\circ\, 18'\, 36''$.

20. Dadas las rectas $r: 5x+ay+3=0$ y $s: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$ determina el valor de *a* para que sean:
a) coincidentes,
b) paralelas,
c) perpendiculares.

La ecuación general de *s* es $x+2y+1=0$, luego

a) Para que sean coincidentes ha de ser: $\frac{5}{1} = \frac{a}{2} = \frac{3}{1}$.
Imposible, luego no existe ningún valor de *a*.

b) Son paralelas si $\frac{5}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 10$

c) Son perpendiculares si $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

21. Dadas las rectas $r: x-2y+1=0$ y $s: \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{2}$ halla el valor de *a* para que:
a) las rectas sean paralelas,
b) las rectas sean perpendiculares,
c) las rectas sean secantes, pero no perpendiculares,
d) la segunda recta pase por $P(-1, 3)$.

$\vec{v}_r(2, 1)$ y $\vec{v}_s(a, 2)$, luego

a) para que sean paralelas $\frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$

b) para que sean perpendiculares $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow a = -1$

c) para que sean secantes, $\frac{2}{a} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \neq 4$. Y para que no sean perpendiculares $a \notin \{-1, 4\}$

d) $a = -1$

22. Calcula el simétrico del punto $P(2, -3)$ respecto de la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2}$.

r se puede expresar como $r: 2x-y-2=0$. Las rectas perpendiculares a *r* son de la forma $x+2y+C=0$. La que pasa por *P* es $s: x+2y+4=0$. Si *M* es el punto de corte de *r* y *s* es $M(0, -2)$ e imponiendo que *M* sea el punto medio del segmento *PP'* con $P'(x, y)$, resulta que el simétrico es $P'(-2, -1)$.

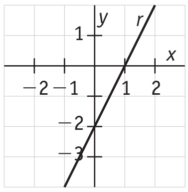


Fig. 10.8.

23. Determina la mediatriz del segmento que tiene por extremos $A(1, 2)$ y $B(3, -1)$.

El punto medio del segmento *AB* es $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$. La recta que pasa por *A* y *B* tiene por vector director el $\vec{AB}(2, -3)$. La mediatriz es perpendicular al segmento *AB*, luego es de la forma $2x-3y+C=0$. Como pasa por *M*, $C = -\frac{5}{2}$. La mediatriz es $4x-6y-5=0$.

24. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, 4)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $2x-y=0$.

$\vec{v}_r(1, 2)$. La recta *s* buscada será de la forma $s: y-4 = m(x+2) \Leftrightarrow mx-y+2m+4=0$, de vector director $\vec{v}_s(1, m)$.

$$\text{Si } (r, s) = 45^\circ \Rightarrow \cos 45^\circ = \left|\frac{1+2m}{\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}}\right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{1+2m}{\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{(1+2m)^2}{5(1+2m)^2} \Rightarrow 3m^2+8m-3=0 \Rightarrow m = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}.$$

Hay, por tanto dos rectas:

la $s_1: y-4 = \frac{1}{3}(x+2)$

y la $s_1: y-4 = -3(x+2)$.

25. Calcula el área del triángulo determinado por el punto $A(1, -2)$, su simétrico respecto de la bisectriz del cuarto cuadrante y el origen de coordenadas.

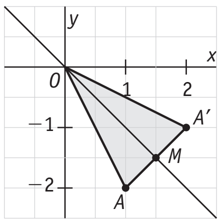


Fig. 10.9.

La bisectriz del cuarto cuadrante es $r: x+y=0$. La perpendicular a ella que pasa por *A* es $s: x-y-3=0$. El punto intersección de r y s es $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Y si M es el punto medio del segmento AA', el simétrico buscado es $A'(2, -1)$. El área del triángulo es $S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AA'}|\cdot d(O,M)}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{3}{2}u^2$.

26. Calcula el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices $A(1, -1)$, $B(2, 3)$ y $C(-3, 2)$.

El baricentro es el punto $G\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

La recta r_{AB} es $r_{AB}: 4x - y - 5 = 0$.
La altura h_c es la perpendicular a la r_{AB} por el vértice C, es decir $h_c: x + 4y - 5 = 0$.
Análogamente es $r_{AC}: 3x + 4y + 1 = 0$. La altura h_b es la perpendicular a la r_{AC} por el vértice B, es decir $h_b: 4x - 3y + 1 = 0$.
Y $r_{BC}: x - 5y - 13 = 0$. La altura h_a es la perpendicular a la r_{BC} por el vértice A, es decir $h_a: 5x + y - 4 = 0$.
Estas tres alturas se cortan en el ortocentro que es el punto $\left(\frac{11}{19}, \frac{21}{19}\right)$.

27. Calcula el baricentro y el circuncentro del triángulo de vértices $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$ y $C(4, 1)$.

El baricentro es el punto $G\left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Los puntos medios de los lados AB, AC y BC son, respectivamente, $M(-1, 1)$, $N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. La recta r_{AB} es $r_{AB}: x + y = 0$. Su mediatriz es su perpendicular por el punto M, es decir $m_c: x - y + 2 = 0$.
Análogamente es $r_{AC}: 2x - 3y - 5 = 0$. Su mediatriz es su perpendicular por el punto N, es decir $m_b: 6x + 4y - 15 = 0$.
Y es r_{BC}: $2x + 7y - 15 = 0$. Su mediatriz es su perpendicular por el punto P, es decir $m_a: 14x - 4y + 1 = 0$.
Estas tres mediatrices se cortan en el circuncentro que es el punto $\left(\frac{7}{10}, \frac{27}{10}\right)$.

28. Considérese la recta, r, de ecuación $y = 3x$ y la recta s, que pasa por el punto (1, 1) y tiene de pendiente $-t$, siendo t un número real positivo. Las rectas r y s junto con el eje OX determinan un triángulo T.
a) Escribe las coordenadas de los tres vértices de T (en función de t).
b) Calcula el área de T en función de t.

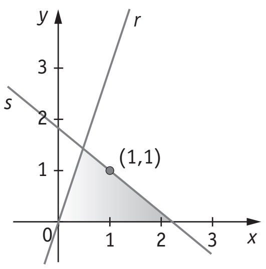


Fig. 10.10.

a) La recta s será de la forma $s: y - 1 = -t(x - 1)$. Un vértice del triángulo T es el origen $O(0, 0)$. Otro es la intersección de r y s, es decir la solución del sistema $\begin{cases} y = 3x \\ y - 1 = -t(x-1) \end{cases}$ que es $A\left(\frac{t+1}{t+3}, \frac{3(t+1)}{t+3}\right)$ y el tercer vértice es la intersección del eje OX con la recta s, es decir $B\left(\frac{t+1}{t}, 0\right)$.

b) El área del triángulo es

$$S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{d(O,B)\cdot d(A,OX)}{2} = \frac{\frac{t+1}{t}\cdot\frac{3(t+1)}{t+3}}{2} = \frac{3(t+1)^2}{2t(t+3)}$$

29. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: x + y - 1 = 0$ y $s: x - 2y - 5 = 0$. Uno de sus vértices es el punto $A(1, -1)$. Halla los otros vértices.

La recta paralela a r que pasa por A es $r': x + y = 0$. La recta paralela a s que pasa por A es $s': x - 2y - 3 = 0$. Si el vértice B es $r' \cap s$ es $B\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; si el vértice C es $r \cap s$ es $C\left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y si el vértice D es $r \cap s'$ es $D\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

30. Los puntos $A(4, 5)$ y $B(2, 1)$ son vértices opuestos de un rombo. El vértice C está situado sobre el eje de abscisas. Halla el vértice *i*.

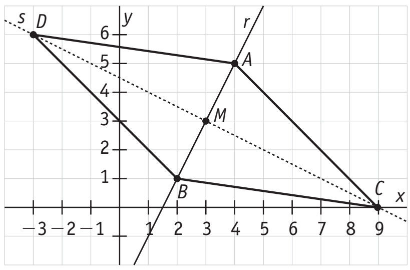


Fig. 10.11.

Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio.
La recta que pasa por A y B es $r: 2x - y - 3 = 0$. El punto medio del segmento AB es $M(3, 3)$. La perpendicular a r por M es $s: x + 2y - 9 = 0$. El vértice C será la intersección de s con el eje OX, es decir $C(9, 0)$. Por último, el cuarto vértice D es el simétrico de C respecto a r, luego $D(-3, 6)$.

31. Considera las rectas $\begin{cases} r: mx - y = 1 \\ s: x - my = 2m - 1 \end{cases}$
a) Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores de m.
b) Determina m si ambas rectas se cortan en un punto de abscisa $x = 3$.

a) Para que sean paralelas o coincidentes $\frac{m}{1} = \frac{-1}{-m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$.

- Si $m=1$, las recta son $\begin{cases} r\colon x-y=1 \\ s\colon x-y=1 \end{cases}$ es decir, son coincidentes.
- Si $m=-1$, las recta son $\begin{cases} r\colon -x-y=1 \\ s\colon x+y=-3 \end{cases}$ es decir, son paralelas.
- Por exclusión, si $m\notin\{-1,1\}$ las recta son secantes.

b) Sustituyendo el valor $x=3$ en el sistema que forman las rectas, se obtiene este otro sistema
$\begin{cases} 3m-y=1 \\ 3-my=2m-1 \end{cases}$ cuya solución determina que $m=\begin{cases} -\dfrac{4}{3} \\ 1 \end{cases}$.

Tipo III. Distancias

32. Sea el triángulo de vértices *A*(4, 2), *B*(13, 5) y *C*(6, 6).
a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice *C*.
b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado *AB*.

a) Si r es la recta que pasa por A y B, la altura h_c que pasa por el vértice C es la perpendicular a r por el punto C. Como $r\colon x-3y+2=0$, $h_c\colon 3x+y+D=0$; y si $C\in h_c$ $D=-24$, luego $h_c\colon 3x+y-24=0$.

b) El punto P donde la altura h_c corta al lado AB es la solución del sistema $\begin{cases} x-3y+2=0 \\ 3x+y-24=0 \end{cases}$. Luego $P(7, 3)$. Las longitudes pedidas son $d(A, P)$ y $d(P, B)$, es decir
$d(A, P)=\sqrt{(7-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$ y
$d(P, B)=\sqrt{(7-13)^2+(3-5)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

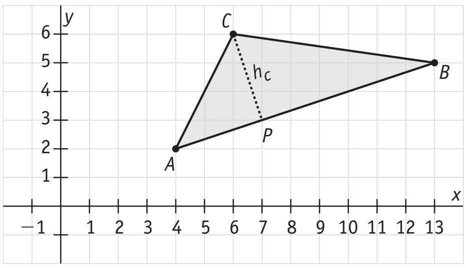


Fig. 10.12.

33. Determina los puntos de la recta $r\colon x-3y+6=0$ que distan 3 unidades de la recta $s\colon 4x+3y-6=0$.

Los puntos de r son de la forma $P(3\lambda-6, \lambda)$. Si $d(P, s)=3$
$\Rightarrow\left|\dfrac{4\cdot(3\lambda-6)+3\lambda-6}{\sqrt{16+9}}\right|=3 \Leftrightarrow 15\lambda-30=\pm15 \Rightarrow \lambda=\begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$.

Hay, pues dos puntos, el $P_1(3, 3)$ y el $P_2(-3, 1)$.

34. Calcula la recta paralela a $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$ que dista $\sqrt{5}$ unidades de ella.

r se puede expresar como $r\colon x+2y+1=0$; un punto de ella es, por ejemplo, el $P(1, -1)$. Las paralelas a ella son de la forma $s\colon\ x+2y+C=0$. Si $d(P,\ s)=\sqrt{5}\ \Rightarrow\left|\dfrac{1-2+C}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}$
$\Leftrightarrow C-1=\pm6 \Rightarrow C=\begin{cases} 6 \\ -4 \end{cases}$.

Hay, por tanto dos rectas:
la $s_1\colon x+2y+6=0$
y la $s_2\colon x+2y-4=0$.

35. Halla la recta perpendicular a $3x+4y-1=0$ que dista 1 unidad del origen de coordenadas.

Las perpendiculares a $r\colon 3x+4y-1=0$ son de la forma $s\colon 4x-3y+C=0$.

Si $d(O, s)=1\Rightarrow\left|\dfrac{C}{\sqrt{25}}\right|=1 \Leftrightarrow C=\pm5$.

Hay, por tanto dos rectas:
la $s_1\colon 4x-3y+5=0$
y la $s_2\colon 4x-3y-5=0$.

36. Determina la recta que pasa por el punto *A*(1, −4) y dista $\sqrt{2}$ unidades del punto *P*(4, 1).

La recta buscada será de la forma
$r\colon y+4=m(x-1) \Leftrightarrow r\colon mx-y-m-4=0$.

Si $d(P, r)=\sqrt{2}\Rightarrow\left|\dfrac{4m-1-m-4}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{3m-5}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{2}\Rightarrow$

$m=\begin{cases} \dfrac{23}{7} \\ 1 \end{cases}$.

Hay, por tanto dos rectas:
la $r_1\colon y+4=\dfrac{23}{7}(x-1)$
y la $s_2\colon y+4=x-1$.

37. En el triángulo de vértices *A*(2, −3), *B*(−1, 4) y *C*(0, 5) calcula:
a) la altura correspondiente al vértice *C*,
b) la ecuación de la mediatriz del lado *AB*,
c) su área.

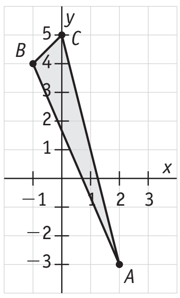


Fig. 10.13.

a) La altura correspondiente al vértice C es $h_c=d(C, r_{AB})$.
Como $r_{AB}\colon 7x+3y-5=0$, resulta que $h_c=d(C, r_{AB})=$
$=\left|\dfrac{7\cdot0+3\cdot5-5}{\sqrt{49+1}}\right|=\dfrac{10}{\sqrt{58}}\,u$

b) El punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. La mediatriz, por ser perpendicular a r_{AB} será de la forma $s: 3x - 7y + D = 0$. Si $M \in s \Rightarrow D = 2$, luego $s: 3x - 7y + 2 = 0$.

c) $S = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|\cdot d(C, r_{AB})}{2} = \dfrac{\sqrt{58}\cdot\frac{10}{\sqrt{58}}}{2} = 5\,u^2$

38. Considérese, en el plano, el triángulo de vértices $A = (2, 0)$, $B = (0, 1)$ y $C = (-3, -2)$. Calcular los ángulos y el área de ese triángulo.

Los ángulos del triángulo coinciden con los ángulos que forman los vectores que determinan sus lados. Como $\overrightarrow{AB}\,(-2, 1)$, $\overrightarrow{AC}\,(-5, -2)$, $\overrightarrow{CA}(5, 2)$, $\overrightarrow{CB}\,(3, 3)$, $\overrightarrow{BA}\,(2, -1)$ y $\overrightarrow{BC}\,(-3, -3)$ será:

$$\cos A = \cos(AB, AC) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{8}{\sqrt{145}} \Rightarrow A = 48^\circ\, 21'\, 59''$$

$$\cos B = \cos(BA, BC) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-3}{\sqrt{90}} \Rightarrow B = 108^\circ\, 26'\, 6''$$

$$\cos C = \cos(CA, CB) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|} = \frac{21}{\sqrt{522}} \Rightarrow C = 23^\circ\, 11'\, 55''$$

La recta que pasa por A y C es $r: 2x - 5y - 4 = 0$. El área del triángulo viene dada por

$$S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{d(A,C)\cdot d(B,r)}{2} = \frac{\sqrt{29}\cdot\left|\frac{-5-4}{\sqrt{29}}\right|}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$$

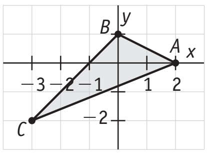


Fig. 10.13.

39. Halla el punto de la recta $2x - y + 4 = 0$ que, junto al origen de coordenadas y el punto $P(-3, 1)$, determinan un triángulo de área $\frac{9}{2}$ u².

Los puntos de $r: 2x - y + 4 = 0$ son de la forma $\Rightarrow A(\lambda, 2\lambda + 4)$.
La recta que pasa por O y P es $s: x + 3y = 0$.

Como $d(A, s) = \left|\dfrac{7\lambda+12}{\sqrt{10}}\right|$, el área del triángulo es

$$S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{OP}|\cdot d(A,s)}{2} = \frac{\sqrt{10}\cdot\left|\frac{7\lambda+12}{\sqrt{10}}\right|}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow |7\lambda + 12| = \pm 9 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} -\frac{3}{7} \\ -3 \end{cases}.$$

Hay, por tanto, dos puntos: el $A_1\left(-\frac{3}{7}, \frac{22}{7}\right)$ y el $A_2(-3, -2)$.

40. Los puntos $A(1, -1)$ y $B(3, 2)$ son vértices de un triángulo de área 6 u². Determina el tercer vértice C, que está sobre la recta $x - y - 5 = 0$.

Los puntos de r: $x - y - 5 = 0$ son de la forma $P(\lambda, \lambda - 5)$. La recta que pasa por A y B es $s: 3x - 2y - 5 = 0$.

Como $d(P, s) = \left|\dfrac{\lambda+5}{\sqrt{13}}\right|$, el área del triángulo es

$$6 = \frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot d(P,s)}{2} = \frac{\sqrt{13}\cdot\left|\frac{\lambda+5}{\sqrt{13}}\right|}{2} \Rightarrow |\lambda + 5| = \pm 12 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 7 \\ -17 \end{cases}.$$

Hay, por tanto, dos puntos: el $P_1(7, 2)$ y el $P_2(-17, -22)$.

41. Los puntos $A(-2, -2)$ y $B(1, 4)$ son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta $x + y - 1 = 0$.

Los puntos de $r: x + y - 1 = 0$ son de la forma $P(\lambda, 1 - \lambda)$. Para que el triángulo sea rectángulo en A, los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$ han de ser perpendiculares $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \lambda = 8$. El punto buscado es $P(8, -7)$.

42. Dadas las rectas $r: 2x - y - 3 = 0$ y $s: x + y = 0$, calcula:
a) el punto P en el que se cortan r y s,
b) la recta s', paralela a s, tal que si P' es el punto de corte de r y s', la distancia entre P y P' sea $\sqrt{5}$u.

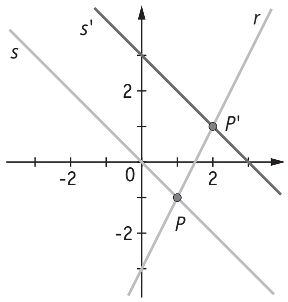


Fig. 10.14.

a) $P(1, -1)$
b) La recta s', por ser paralela a s, será de la forma $s': x + y + C = 0$.
El punto P' por pertenecer a r será de la forma $P'(\lambda, 2\lambda, -3)$.
Si $d(P, P') = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2 + (2\lambda-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

- Si $\lambda = 0$, $P'(0, -3)$ e imponiendo que $P' \in s' \Rightarrow C = 3$, luego $s'_1: x + y + 3 = 0$
- Si $\lambda = 2$, $P'(2, 1)$ e imponiendo que $P' \in s' \Rightarrow C = -3$, luego $s'_2: x + y - 3 = 0$.

43. El segmento $A(-3, 2)$ y $B(1, -2)$ es la base de un triángulo isósceles. Determina el tercer vértice C, que está sobre la recta $2x - y - 4 = 0$, y el área del triángulo.

Los puntos de $r: 2x - y - 4 = 0$ son de la forma $C(\lambda, 2\lambda - 4)$.
Como el triángulo es isósceles $d(C, A) = d(C, B)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\lambda+3)^2+(2\lambda-6)^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+(2\lambda-2)^2} \Rightarrow \lambda=5$. El punto buscado es el $C(5, 6)$.
La recta que pasa por A y B es $s: x+y+1=0$.
Además, $d(C, s)=\dfrac{12}{\sqrt{2}}$, luego el área del triángulo es

$$S=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{|\vec{AB}|\cdot d(C,s)}{2}=\frac{4\sqrt{2}\cdot\frac{12}{\sqrt{2}}}{2}=24u^2$$

44. Un cuadrado tiene una diagonal sobre la recta $2x-y+3=0$. Uno de sus vértices es el punto $A(2, 2)$. Halla los otros vértices y la longitud de la diagonal.

El punto A no está sobre la recta $r: 2x-y+3=0$. El vértice C es el simétrico de A respecto de r. Luego $C(-2, 4)$.
La diagonal que une estos dos puntos es la recta $s: x+2y-6=0$.
Los otros dos vértices estarán sobre la diagonal r, es decir son de la forma $P(\lambda, 2\lambda+3)$.
Como las diagonales de un cuadrado se cortan en su punto medio, basta imponer que $d(P, s)=d(A, r)$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\lambda+2(2\lambda+3)-6}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{4-2+3}{\sqrt{5}}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{5\lambda}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow \lambda=\pm 1$$

- Si $\lambda=1$ obtenemos el vértice $B(1, 5)$
- Si $\lambda=-1$ obtenemos el cuarto vértice $D(-1, 1)$

La longitud de la diagonal es $d(A, C)=\sqrt{20}$.

45. Un rombo tiene una diagonal sobre la recta $x-2y+2=0$ y uno de sus vértices es el punto $A(2, 7)$. Halla los demás vértices si el perímetro del rombo es 20 cm.

El punto A no está sobre la recta $r: x-2y+2=0$. El vértice C es el simétrico de A respecto de r. Luego $C(6, -1)$.
Los otros dos vértices estarán sobre la diagonal r, es decir son de la forma $P(2\lambda-2, \lambda)$.
Como los lados de un rombo son iguales, luego cada uno mide 5 cm. Basta imponer que $d(P, A)=$

$$5\Leftrightarrow \sqrt{(2\lambda-4)^2+(\lambda-7)^2}=5 \Rightarrow \lambda=\begin{cases}4\\2\end{cases}$$

- Si $\lambda=4$ obtenemos el vértice $B(6, 4)$
- Si $\lambda=-1$ obtenemos el cuarto vértice $D(2, 2)$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Los vectores $\vec{AB}(2,-3)$ y $\vec{CD}$ son equipolentes. Si $C(-1, 2)$, las coordenadas del punto D son:
a) $D(1, -1)$
b) $D(3, -5)$
c) $D(-3, 5)$

a) $D(1, -1)$

2. Si el vector $\vec{u}(-1, a)$ tiene módulo 5, el valor de a es:
a) $a=4$
b) $a=\pm 2\sqrt{6}$
c) $a=6$

b) $a=\pm 2\sqrt{6}$

3. Los vectores $\vec{u}(-1, 3)$ y $\vec{v}(2, b)$ son ortogonales. Entonces b vale:
a) $b=-6$
b) $b=2/3$
c) $b=1$

b) $b=2/3$

4. La recta r es paralela al eje OY y pasa por $A(1, -3)$. Su ecuación es:
a) $x=1$
b) $x=-3$
c) $y=-3$

a) $x=1$

5. La ecuación general de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y $Q(0, 3)$ es:
a) $x-y-3=0$
b) $2x+y-5=0$
c) $2x+y-3=0$

c) $2x+y-3=0$

6. Las rectas $r: 3x-y+1=0$ y $s: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{6}$ son:
a) coincidentes
b) paralelas
c) secantes

b) paralelas

7. La pendiente de la recta $x-2y+3=0$ es:
a) $m=\dfrac{1}{2}$
b) $m=2$
c) $m=-2$

a) $m=\dfrac{1}{2}$

8. Las rectas r y s son perpendiculares. Si la pendiente de r es $-\dfrac{1}{2}$, la de s es:
a) 2
b) $\dfrac{1}{2}$
c) 2

c) 2

9. La distancia entre los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 2)$ es :
a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{20}$
c) $\sqrt{116}$

b) $\sqrt{20}$

10. La distancia del punto $P(1, -2)$ a la recta $2x + y - 4 = 0$ es:

a) $-\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

c) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

2 cuestiones para investigar

1. Comprueba que el baricentro de un triángulo *ABC* dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

Lo demostramos para la mediana correspondiente al vértice *A*. Sean *N* y *P* son los puntos medios de los lados *BC* y *AC*. Si *G* es el baricentro, basta comprobar que $\overrightarrow{GN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

Los triángulos *PGN* y *BGA* son semejantes (pues *PN* es paralelo a *AB* y de longitud la mitad, según vimos en uno de los problemas propuestos).

Por tanto $\dfrac{GN}{AG} = \dfrac{GP}{BG} = \dfrac{PN}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Luego $\overrightarrow{GN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

También se deduce de la semejanza de triángulos que

$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN} = 2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN}\right) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

Actividades

1. Encuentra una circunferencia concéntrica con $x^2+y^2+2x+y-1=0$ que pase por el punto $P(2, -1)$.

La circunferencia será $x^2+y^2+2x+y+p=0$. Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto $P(2, -1)$, obtenemos $p=-8$. La ecuación pedida es $x^2+y^2+2x+y-8=0$.

2. Halla las ecuaciones de la rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ perpendiculares a la recta $s: x-y+3=0$.

El centro de la circunferencia es el punto $C(-1, 2)$ y su radio $r=\sqrt{8}$. Las rectas perpendiculares a s son de la forma $t: x+y+D=0$. Para que sean tangentes a la circunferencia, su distancia al centro ha de ser igual al radio, es decir,

$$\left|\frac{1+D}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{8} \Rightarrow 1+D=\pm 4 \Rightarrow D=\begin{cases}3\\-5\end{cases}.$$

Las rectas buscadas son: $\begin{cases}t_1: x+y+3=0\\ t_2: x+y-5=0\end{cases}$

3. Determina la excentricidad y la ecuación reducida de una elipse de semieje menor $b=\sqrt{3}$ si uno de sus focos es el punto $F(5, 0)$.

$c=5$; $a^2=b^2+c^2=28$. La elipse es $\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

Su excentricidad es $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{\sqrt{28}}=0{,}9449$.

4. Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la elipse de ecuación $x^2+2y^2+2x-8y-1=0$.

Completando cuadrados la ecuación se puede escribir $\dfrac{(x+1)^2}{10}+\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$. El centro es el punto $(-1, 2)$; su eje mayor es paralelo al eje OX. Además, $a=\sqrt{10}$, $b=c=\sqrt{5}$ y $e=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=0{,}7071$.

5. Determina la excentricidad y la ecuación reducida de una hipérbola de semieje imaginario $b=3$, si uno de sus focos es el punto $F(5, 0)$.

$c=5$; $a^2=c^2-b^2=16$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Su excentricidad vale $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}=1{,}25$.

6. Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $x^2-4y^2+2x-8y-11=0$.

Completando cuadrados la ecuación se puede escribir $\dfrac{(x+1)^2}{8}+\dfrac{(y+1)^2}{2}=1$. El centro es el punto $(-1, -1)$; su eje real es paralelo al eje OX. Además, $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$ y $e=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=1{,}1180$.

7. Determina el foco, la directriz, el vértice y el eje de la parábola de ecuación $y^2-4x+2y+5=0$.

Completando cuadrados, la parábolas se puede escribir $(y+1)^2=4(x-1)$.
El vértice es el punto $V(1, -1)$.
Su eje es la recta $y=-1$.
Su parámetro es $p=2$.
Su foco el punto $F(2, -1)$ y la directriz, la recta $\delta: x=0$.

Problemas propuestos

Tipo I. Lugares geométricos

1. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $A(2, -3)$ y de la recta $r: x-2y-1=0$.

Si $P(x, y)$ es del lugar geométrico será $d(P, A)=d(P, r)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\left|\frac{x-2y-1}{\sqrt{1+4}}\right|.$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes resulta la ecuación:
$4x^2+y^2+4xy-18x+26y+64=0$.

2. Determina la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Si $P(x, y)$ es de la mediatriz será $d(P, A)=d(P, B)$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$.
Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes resulta la recta $3x-y-1=0$.

3. Calcula las bisectrices de las rectas $r: 2x+y-3=0$ y $s: 2x-4y+5=0$.

Si $P(x, y)$ es de la bisectriz será $d(P, r)=d(P, s)$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+y-3}{\sqrt{4+1}}\right|=\left|\frac{2x-4y+5}{\sqrt{4+16}}\right| \Leftrightarrow \left(\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}}\right)=\pm\left(\frac{2x-4y+5}{2\sqrt{5}}\right)$$

- De $\dfrac{2x+y-3}{\sqrt{5}}=\dfrac{2x-4y+5}{2\sqrt{5}}$ se obtiene una bisectriz: $2x+6y-11=0$.
- De $\dfrac{2x+y-3}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2x-4y+5}{2\sqrt{5}}$ se obtiene la otra: $6x-2y-1=0$.

4. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $r: 3x-4y+2=0$ sea igual al cuadrado de su distancia al punto $A(3, -2)$.

Si $P(x, y)$ es del lugar geométrico será $d(P, r)=d^2(P, A) \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{3x-4y+2}{\sqrt{9+16}}\right|=(x-2)^2+(y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \pm\left(\frac{3x-4y+2}{5}\right)=(x-2)^2+(y+3)^2$$

- De $\frac{3x-4y+2}{5}=(x-2)^2+(y+3)^2$ se obtiene la ecuación $5x^2+5y^2-33x+24y+63=0$, que es una circunferencia de centro $C\left(\frac{33}{2},-12\right)$ y radio $\frac{\sqrt{1413}}{2}$.
- De $-\frac{3x-4y+2}{5}=(x-2)^2+(y+3)^2$ se obtiene la ecuación $5x^2+5y^2-27x+16y+67=0$, que no es una circunferencia.

5. Determina la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos (0, 0) y (1, 1) es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcula el área que encierra.

Sean $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$. Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, cumple la propiedad $d^2(P, O)+d^2(P, A)=9 \Leftrightarrow$ $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$.

Se trata de una circunferencia de centro el punto $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=2$. El área que encierra es $A=\pi r^2=4\pi$ u^2.

6. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a las rectas $r: 4x+3y-2=0$, $s: 12x-5y=0$ sea $\frac{26}{5}$.

Si $P(x, y)$ es del lugar geométrico se verificará

$$d(P,r)=\frac{26}{5}d(P,s) \Leftrightarrow \left|\frac{4x+3y-2}{\sqrt{16+9}}\right|=\frac{26}{5}\left|\frac{12x-5y}{\sqrt{144+25}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x+3y-2}{5}\right)=\pm\frac{26}{5}\left(\frac{12x-5y}{13}\right)$$

- De $\frac{4x+3y-2}{5}=\frac{26}{5}\left(\frac{12x-5y}{13}\right)$ se obtiene la recta $20x-13y+2=0$,
- De $\frac{4x+3y-2}{5}=-\frac{26}{5}\left(\frac{12x-5y}{13}\right)$ se obtiene la recta $28x-7y-2=0$.

7. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que disten de la recta $r: 5x+12y-3=0$ triple que del eje OY.

El eje OY tiene por ecuación $x=0$. Si $P(x, y)$ es del lugar geométrico se verificará $d(P,r)=3d(P,OY) \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{5x+12y-3}{\sqrt{25+144}}\right|=3\left|\frac{x}{\sqrt{1}}\right| \Leftrightarrow \frac{5x+12y-3}{13}=\pm 3x$$

- De $\frac{5x+12y-3}{13}=3x$ resulta la recta de ecuación $34x-12y+3=0$,
- De $\frac{5x+12y-3}{13}=-3x$ resulta la recta $44x+12y-3=0$.

8. Halla el lugar geométrico que determinan los centros de las circunferencias tangentes simultáneamente al eje *OX* y a la recta $r: 3x+4y-12=0$.

El eje OX tiene por ecuación $y=0$. Sea $C(x, y)$ el centro de una de estas circunferencias. Será

$$d(C,r)=d(C,OX) \Leftrightarrow \left|\frac{3x+4y-12}{\sqrt{9+16}}\right|=\left|\frac{y}{\sqrt{1}}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4y-12}{5}=\pm y$$

- De $\frac{3x+4y-12}{5}=y$ resulta la recta $3x-y-12=0$,
- De $\frac{3x+4y-12}{5}=-y$ resulta la recta $x+3y-4=0$.

Tipo II. Circunferencias

9. Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias:
a) de centro $C(1, -5)$ y radio 5,
b) de centro $C(2, -2)$ y que pasa por $P(3, 1)$,
c) de centro $C(2, -1)$ y tangente al eje *OX*,
d) de centro $C(-2, -1)$ y tangente a la recta $s: x+5y-2=0$,
e) de diámetro el segmento de extremos $A(-4, 1)$ y $B(2, 3)$.

a) $(x-1)^2+(y+5)^2=25$,
b) El radio es $r=d(C, P)=\sqrt{10}$.
Su ecuación $(x-2)^2+(y+2)^2=10$,
c) El radio es $r=d(C, OX)=1$.
Su ecuación $(x-2)^2+(y+1)^2=1$,
d) El radio es $r=d(C, s)=\frac{9}{\sqrt{26}}$.
Su ecuación $(x+2)^2+(y+1)^2=\frac{81}{26}$,
e) El centro es el punto medio del segmento AB, es decir $C(-1, 2)$. El radio es $d(A, C)=\sqrt{10}$.
La ecuación $(x+1)^2+(y-2)^2=10$.

10. a) Los puntos $A=(3, 0)$ y $B=(0, 4)$ son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Halla la ecuación de esta.
b) Los puntos (6, 0) y (0, 8) son diametralmente opuestos en una circunferencia. Calcula la ecuación de la misma y especifica sus valores característicos.

a) El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento AB, es decir $C\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. El radio es, por ejemplo, $d(A, C)=\frac{5}{2}$.
La ecuación pedida $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-4y=0$.
b) El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento dado, es decir $C(3, 4)$. El radio es, por ejemplo, $d(A, C)=5$. La ecuación pedida es $(x-3)^2+(y-4)^2=25 \Leftrightarrow$ $x^2+y^2-6x-8y=0$.

11. Determina el radio y el centro de las siguientes circunferencias:
a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$, **b)** $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$,
c) $2x^2 + 2y^2 + 4x + y - 3 = 0$.

a) $C(5, -2)$, $r = \sqrt{29}$

b) $C\left(\dfrac{3}{2}, -1\right)$, $r = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

c) $C\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$, $r = \dfrac{\sqrt{41}}{4}$

12. Dados los puntos $A(-5, -1)$, $B(2, 4)$, $C(0, 2)$, sea M el punto medio del segmento BC. Calcula la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AM.

El punto M tiene por coordenadas $M(1, 3)$. El centro de la circunferencia es el punto $D(-2, 1)$, punto medio del segmento AM. El radio es, por ejemplo, $d(D, A) = \sqrt{13}$. La ecuación pedida es $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$.

13. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$, determina la ecuación de otra concéntrica con ella
a) de radio $\sqrt{2}$,
b) que pase por el punto $P(-3, 1)$.

El centro de estas circunferencias es $C(4, -2)$.
a) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 = 0$,
b) el radio es $d(C, P) = \sqrt{58}$; la ecuación $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 58 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y - 38 = 0$.

14. Sean $Q = (-1, 0)$ y $R = (3, 0)$
a) Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano para los que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es 5.
b) Identifica la cónica resultante y sus elementos característicos.

a) Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, las componentes de los vectores mencionados son $\overrightarrow{PQ}(-1-x,-y)$, $\overrightarrow{PR}(3-x,-y)$; su producto escalar vale $(-1 - x)\cdot(3 - x) + (-y)\cdot(-y) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$.
b) Se trata de una circunferencia de centro el punto $C(1, 0)$ y radio $r = 3$.

15. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 1)$, $B(-2, 2)$ y $C(2, -2)$.

Sustituyendo en la ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ las coordenadas de los puntos A, B y C se obtiene el sistema
$\begin{cases} -2m+n+p=-5 \\ -2m+2n+p=-8 \\ 2m-2n+p=-8 \end{cases}$ cuya solución es $m = -3$, $n = -3$, $p = -8$.
La circunferencia es $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$.

16. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$ y tiene su centro en la recta $x - 2y - 2 = 0$.

El centro C está en la mediatriz del segmento AB, que es la recta $3x - y + 4 = 0$; como también está en la recta $x - 2y - 2 = 0$, es la solución del sistema $\begin{cases} 3x-y+4=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases}$, es decir, es el punto $C(-2, -2)$. El radio es, por ejemplo, $d(A, C) = 5$. La ecuación pedida es $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

17. a) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, 6)$ y $B = (5, 2)$, y tiene su centro en la recta $y = 2x$.
b) Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(-2, 3)$ y que tiene su centro en la recta $x + y + 4 = 0$. Especifica los elementos característicos de la misma.

a) El centro C está en la mediatriz del segmento AB, que es la recta $x - y + 1 = 0$; como también está en la recta $y = 2x$, es la solución del sistema $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y=2x \end{cases}$. Luego C(1, 2).
El radio es, por ejemplo, $d(A, C) = 4$. La ecuación pedida es $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
b) En este caso, la mediatriz del segmento AB es la recta $2x - y + 2 = 0$. El centro será la solución del sistema $\begin{cases} x+y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$, es decir $C(-2, -2)$. El radio $r = d(A, C) = 5$, luego la circunferencia tiene por ecuación $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

18. La circunferencia C pasa por el punto $A = (4, 0)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $B = (4, 4)$.
a) Determina la ecuación de la recta que pasa por B y por el centro de la circunferencia C.
b) Encuentra el centro de C y calcula su radio.

a) La recta pedida es perpendicular a la $y = x$, luego será de la forma $x + y + D = 0$. Como pasa por $B(4, 4)$, es $D = -8$. La recta es $x + y - 8 = 0$.
b) El centro está en la recta $x + y - 8 = 0$. También en la mediatriz del segmento AB, que es la recta $y - 2 = 0$. Luego es la solución del sistema $\begin{cases} x+y-8=0 \\ y-2=0 \end{cases}$, es decir, es el punto $P(6, 2)$. El radio es, por ejemplo, $r = d(P, B) = \sqrt{8}$.

19. a) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P = (2, 0)$ y $Q = (0, 1)$.
b) Una circunferencia de longitud 2π que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar geométrico definido en a). Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia.

a) El lugar geométrico pedido es la mediatriz del segmento PQ, es decir, la recta $4x - 2y - 3 = 0$.
b) El radio de la circunferencia de longitud 2π es $r = 1$. El centro de la circunferencia, por estar en el lugar geométrico del apartado a), será de la forma $C_1\left(a, \dfrac{4a-3}{2}\right)$. Como además pasa por el origen de coordenadas, $O(0, 0)$, será

$d(O, C) = r = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a-0)^2 + \left(\frac{4a-3}{2} - 0\right)^2} = 1.$

Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes, resulta la ecuación $20a^2 - 24a + 5 = 0$, cuya solución es $a = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{4}$.

Hay, por tanto, dos soluciones:

el punto $C_1\left(\frac{6+\sqrt{11}}{10}, \frac{-3+2\sqrt{11}}{10}\right)$

y el $C_2\left(\frac{6-\sqrt{11}}{10}, \frac{-3-2-\sqrt{11}}{10}\right)$.

20. a) Halla la mediatriz del segmento determinado por la recta $x - y - 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$.
b) Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y por los puntos de intersección de la recta y circunferencias anteriores.

a) Los puntos en que la recta corta a la circunferencia son las soluciones del sistema $\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0 \end{cases}$ que son $P(2, 0)$ y $Q(-1, -3)$. La mediatriz del segmento PQ es la recta $x + y + 3 = 0$.

b) Sustituyendo en la ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ las coordenadas de los puntos $O(0, 0)$, $P(2, 0)$ y $Q(-1, -3)$ se obtiene un sistema cuya solución es $m = 4$, $n = 2$, $p = 0$. La circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.

21. Idea dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$. razona la respuesta.

Primer método: calculando la distancia del centro de la circunferencia a la recta. Si ésta es mayor, igual o menor que el radio de la circunferencia, la recta será, respectivamente, exterior, tangente o secante a la circunferencia. En nuestro caso, el centro es el punto $C(6, 3)$ y el radio $r = 5$. La distancia de C a la recta dada es $\left|\frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 8}{\sqrt{16+9}}\right| = 5$. Como es igual al radio, la recta es tangente a la circunferencia. Este método no permite conocer el punto de tangencia.

Segundo método: resolviendo el sistema $\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$.

Su solución es $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Como la solución es única, la recta es tangente a la circunferencia; el punto de tangencia es la solución de dicho sistema: el (2, 0).

22. Calcula la ecuación de la tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ en el punto $P(3, -1)$.

El punto es de la circunferencia; el centro de esta circunferencia es el punto $C(2, -3)$. La ecuación de la recta tangente es $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, es decir, $x + 2y - 1 = 0$. La normal es la recta $2x - y - 7 = 0$.

23. Sea s la recta $3x + 4y - 1 = 0$. Determina las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$
a) paralelas a la recta s,
b) perpendiculares a la recta s.

El centro de la circunferencia es $C(2, -2)$ y el radio $r = 5$.

a) Las rectas paralelas a s son de la forma $t: 3x + 4y + D = 0$.

Si $d(C, t) = 5 \Rightarrow \left|\frac{-2+D}{5}\right| = 5 \Leftrightarrow -2 + D = \pm 25 \Rightarrow D = \begin{cases} 27 \\ -23 \end{cases}$

Las rectas buscadas son
$t_1: 3x + 4y + 27 = 0$ y $t_2: 3x + 4y - 23 = 0$.

b) Las rectas perpendiculares a s son de la forma $t: 4x - 3y + D = 0$. Si $d(C, t) = 5 \Rightarrow$

$\left|\frac{14+D}{5}\right| = 5 \Leftrightarrow 14 + D = \pm 25 \Rightarrow D = \begin{cases} 11 \\ -39 \end{cases}$

Las rectas buscadas son
$t_1: 4x - 3y + 11 = 0$ y $t_2: 4x - 3y - 39 = 0$.

24. Halla la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos (0, 2) y (0, −2) y es tangente a la recta $r: y = 3x + 2$. En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C, halla su ecuación:

El punto $P(0, 2)$ es de r, luego P es el punto de tangencia. El centro de la circunferencia está en la perpendicular a r que pasa por P, es decir en la recta $x + 3y - 6 = 0$. También está en la mediatriz del segmento que determinan los puntos (0, 2) y (0, −2), que es la recta $y = 0$. Luego el centro es la solución del sistema $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, o sea, el punto $A(6, 0)$. El radio es, por ejemplo, $r = d(P, A) = \sqrt{40}$. La ecuación de la circunferencia es $(x - 6)^2 + y^2 = 40$.

Las rectas paralelas a r son de la forma $s: 3x - y + D = 0$.
Si imponemos que $d(A, s) = r$, $\Rightarrow$

$\left|\frac{18+D}{\sqrt{10}}\right| = \sqrt{40} \Leftrightarrow 18 + D = \pm 20 \Rightarrow D = \begin{cases} 2 \\ -38 \end{cases}$;

la otra recta buscada es $s: 3x - y - 38 = 0$.

25. Sean los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, 3)$. Calcula:
a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto B y tiene su centro en A.
b) Ecuación de la tangente a esa circunferencia en B.
c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes cartesianos.

a) El radio será $r = d(A, B) = \sqrt{5}$. Como el centro es el punto A, la ecuación de la circunferencia es $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

b) La ecuación de la recta tangente en B es $t: 2x + y - 13 = 0$.

c) La recta t corta a los ejes cartesianos en los puntos $P\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ y $Q(0, 13)$.

El área del triángulo es $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{13}{2} \cdot 13}{2} = \frac{169}{4}\ u^2$.

26. Calcula la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ desde el punto $P(4, 3)$.

La circunferencia tiene por centro $C(-1, -2)$ y radio $r=\sqrt{10}$. El punto P es exterior a la circunferencia. Las rectas que pasan por P son de la forma $s: y-3=m(x-4)$.

Si $d(C, s)=r \Leftrightarrow \left|\dfrac{-5m+5}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$3m^2-10m+3=0 \Rightarrow m=\begin{cases}3\\1/3\end{cases}$

- Si $m=3$ se obtiene la recta $s_1: y-3=3(x-4) \Leftrightarrow$ $3x-y-9=0$.
- Si $m=\dfrac{1}{3}$ se obtiene la recta $s_2: y-3=\dfrac{1}{3}(x-4) \Leftrightarrow$ $x-3y+5=0$.

27. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(5, 8)$ y es tangente a las rectas $r: 2x-y+3=0$, $s: x-2y+3=0$.

Si la circunferencia es tangente a las dos rectas, su centro está situado en una de sus bisectrices, que son las rectas $x+y=0$, $x-y+2=0$. Si ha de pasar por el punto P, el centro sólo puede estar en la bisectriz $x-y+2=0$. Es decir, el centro es de la forma $C(a, a+2)$.
Además $d(C, r)=d(C, P)$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{2a-(a+2)+3}{\sqrt{5}}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(a-5)^2+(a+2-8)^2} \Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{a+1}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{(a-5)^2+(a-6)^2}$.

Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes resulta la ecuación $9a^2-112a+304=0$, cuyas soluciones son $a=4$, $a=\dfrac{76}{9}$.

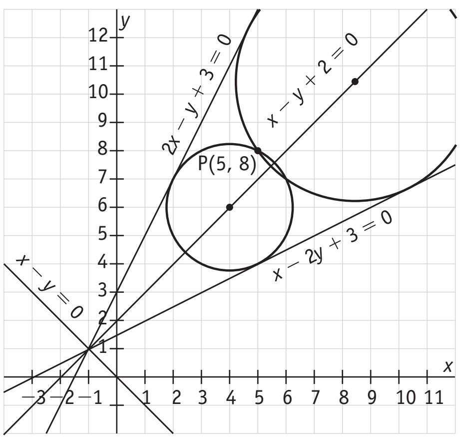


Fig. 11.1.

- Si $a=4$, el centro es $C(4, 6)$ y el radio $r=d(C, P)=\sqrt{5}$. La circunferencia es $(x-4)^2+(y-6)^2=5$.
- Si $a=\dfrac{76}{9}$, el centro es $C\left(\dfrac{76}{9}, \dfrac{94}{9}\right)$ y el radio $r=d(C, P)=$ $=\dfrac{\sqrt{1445}}{9}$. La circunferencia, en este caso, es $\left(x-\dfrac{76}{9}\right)^2+\left(y-\dfrac{94}{9}\right)^2=\dfrac{1445}{81}$.

28. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices $A(1, 6)$, $B(-4, -4)$ y $C(4, 0)$.

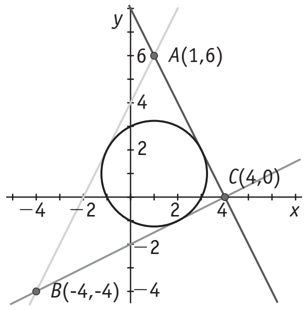


Fig. 11.2.

El centro de la circunferencia inscrita a un triángulo es su incentro o punto de corte de las tres bisectrices del triángulo.
La recta que contiene al lado AB tiene por ecuación $r_{AB}: 2x-y+4=0$.
La recta que contiene al lado AC tiene por ecuación $r_{Ac}: 2x+y-8=0$.
La recta que contiene al lado BC tiene por ecuación $r_{BC}: x-2y-4=0$.
Bisectrices de los lados r_{AB} y r_{AC}:

$\left|\dfrac{2x-y+4}{\sqrt{5}}\right|=\left|\dfrac{2x+y-8}{\sqrt{5}}\right| \Leftrightarrow 2x-y+4=\mp(2x+y-8)$.

Es decir son las rectas $y-6=0$, $x-1=0$. Esta última es la **bisectriz interior.**
Bisectrices de los lados r_{AB} y r_{BC}:

$\left|\dfrac{2x-y+4}{\sqrt{5}}\right|=\left|\dfrac{x-2y-4}{\sqrt{5}}\right| \Leftrightarrow 2x-y+4=\mp(x-2y-4)$.

Es decir son las rectas $x+y+8=0$, $x-y=0$. Esta última es la **bisectriz interior.**
El centro de la circunferencia es la solución del sistema $\begin{cases}x-1=0\\x-y=0\end{cases}$, es decir, C(1, 1).

El radio es, por ejemplo, $r=d(C, r_{AB})=\left|\dfrac{2\cdot 1-1+4}{\sqrt{5}}\right|=\left|\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}$.

Luego la ecuación de la circunferencia pedida es:
$(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

Tipo III. Elipses e hipérbolas

29. Halla la ecuación reducida de las siguientes elipses:
a) distancia focal 4 y semieje menor 3,
b) semidistancia focal 3 y eje mayor 10,
c) pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d) pasa por (−4, 1) y eje menor 6,
e) pasa por (3, 1) y (0, 2).

a) Como $c=2$, $b=3$, es $a^2=13$. La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$,

b) Como $c=3$, $a=5$, es $b^2=16$. La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$,

c) Partiendo de la ecuación general $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se tiene, al imponer las condiciones del enunciado:

$$\begin{cases} \frac{64}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

. Resolviendo este sistema resulta $a^2=100$, $b^2=25$. La elipse es $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$.

d) Como $2b=6$, es $b=3$. Al pasar por $(-4, 1)$, resulta $\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=18$. La elipse es $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

e) Al imponer que pase por los dos puntos dados resulta el sistema

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{0}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \end{cases}$$

que una vez resuelto determina la elipse $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

30. Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(-1, 2)$ y $F'(3, 2)$, y su excentricidad es igual a $\frac{1}{3}$.

Es $2c=d(F, F')=4$, luego $c=2$. Como $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$, es $a=6$. De la relación $a^2=b^2+c^2$, se deduce que $b^2=32$. El centro es el punto medio del segmento FF', luego es el punto $(1, 2)$. La ecuación de la elipse es $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{32}=1$.

31. Determina los elementos de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$ **b)** $2x^2+25y^2=50$

c) $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y+2)^2}{121}=1$ **d)** $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

a) Centrada en el origen; eje mayor el eje OX; $a=12$, $b=6$, $c=\sqrt{108}$,
b) Centrada en el origen; eje mayor el eje OX; $a=5$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{23}$,
c) Centrada en el punto $(3, -2)$; eje mayor paralelo al el eje OX; $a=13$, $b=11$, $c=\sqrt{48}$,
d) Centrada en el punto $(0, 2)$; eje mayor paralelo al el eje OY; $a=2$, $b=5$, $c=\sqrt{21}$.

32. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos (3, −2) y (3, 4) es 8. Identifica dicho lugar geométrico y determina sus elementos.

Se trata de una elipse cuyos focos son los puntos dados. Su eje mayor es paralelo al eje OY. La constante es $2a=8$. La distancia focal es $2c=6$. Su centro es el punto medio de los dos focos, es decir, el punto $(3, 1)$. Su ecuación es, por tanto, $\frac{(x-3)^2}{7}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

33. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto A(3, 0) es la mitad de su distancia a la recta r: $x-9=0$. Identifica dicho lugar y determina sus elementos.

Si $P(x, y)$ es un punto de dicho lugar geométrico, la propiedad $d(P, A)=\frac{1}{2}d(P, r)$ equivale a $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{|y-9|}{2}$. Elevando al cuadrado los dos miembros y agrupando términos semejantes, resulta la ecuación $3x^2-6x+4y^2=45$. Completando cuadrados, resulta $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. Se trata, por tanto, de una elipse, centrada en el punto $(1, 0)$, de eje mayor paralelo al eje de abscisas. Además, $a=4$, $b=\sqrt{12}$, $c=2$.

34. Calcula la ecuación de la tangente y de la normal a la elipse $3x^2+4y^2=16$ en el punto $P(2, -1)$.

Las rectas que pasan por P son de la forma $y+1=m(x-2)$. Imponiendo que el sistema $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ y+1=m(x-2) \end{cases}$ tenga solución única resulta $m=\frac{3}{2}$. La recta tangente es, por tanto,

$y+1=\frac{3}{2}(x-2) \Leftrightarrow 3x-2y-8=0$.

La normal es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, luego su ecuación es $y+1=-\frac{2}{3}(x-2) \Leftrightarrow$

$2x+3y-1=0$.

35. Determina la posición relativa de la elipse $6x^2+y^2=100$ y la recta $12x-y+50=0$.

La solución del sistema $\begin{cases} 6x^2+y^2=100 \\ 12x^2-y+50=0 \end{cases}$ es el punto $P(-4, 2)$, luego la recta es tangente a la elipse en dicho punto.

36. Halla la ecuación de las tangentes a la elipse $3x^2+4y^2=16$ paralelas a la recta $3x-2y+1=0$.

Las rectas paralelas a la dada son de la forma $3x-2y+C=0$. para que sean tangentes a la elipse, el sistema $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 3x-2y+C=0 \end{cases}$ debe tener solución única. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera resulta una ecuación de segundo grado cuyo discriminante ha de ser 0. Resolviendo $C=\pm 8$. Las rectas pedidas son $3x-2y+8=0$, $3x-2y-8=0$.

37. Calcula la tangente a la elipse $x^2+6y^2=100$ desde el punto $P(10, 5)$.

Las rectas que pasan por P son de la forma $y-5=m(x-10)$. Imponiendo que el sistema $\begin{cases} x^2+6y^2=100 \\ y-5=m(x-10) \end{cases}$ tenga solución única resulta $m=\frac{1}{12}$. La recta tangente es, por tanto,

$y-5=\frac{1}{12}(x-10) \Leftrightarrow x-12y+50=0$.

38. Un segmento de longitud 3, apoya sus extremos sobre los ejes de coordenadas (uno sobre cada eje) tomando todas las posiciones posibles.
a) Determina la ecuación del lugar geométrico del punto del segmento que está situado a distancia 1 del extremo que se apoya en el eje *OY*.
b) Identifica la cónica resultante.

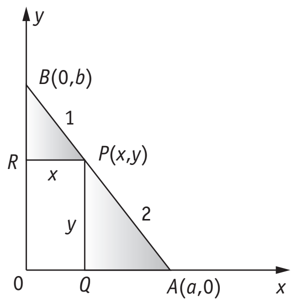


Fig. 11.3.

Sean $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ los puntos de apoyo en los ejes OX y OY respectivamente. Por Pitágoras es $a^2 + b^2 = 9$.

a) Sea $P(x, y)$ un punto de dicho lugar. Los triángulos RPB y OAB son semejantes, luego $\frac{x}{a}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a=3x$. También lo son los triángulos QAP y OAB, luego $\frac{y}{b}+\frac{2}{3} \Leftrightarrow b=\frac{3y}{2}$.
Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 9$, se obtiene $9x^2+\frac{9y^2}{4}=9 \Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

b) Se trata de una elipse centrada en el origen, con eje mayor el eje de ordenadas, con semieje mayor 2 y semieje menor 1.

39. Halla la ecuación reducida de las siguientes hipérbolas:
a) distancia focal 10 y eje imaginario 6,
b) semidistancia focal 3 y eje real 4,
c) pasa por el punto (−3, 2) y su excentricidad es $\sqrt{\frac{5}{3}}$
d) pasa por (3, −5) y semieje real 2,
e) pasa por (6, −1) y (3, 0),
f) pasa por el punto (25, 12) y una de sus asíntotas es la recta $y=\frac{3}{5}x$.

a) Como $c = 5$, $b = 3$, es $a^2 = c^2 - b^2 = 16$. La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$,

b) como $c = 3$, $a = 2$, es $b^2 = 5$. La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,

c) partiendo de la ecuación general $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, se tiene, al imponer las condiciones del enunciado:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \\ \sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{c}{a} \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema resulta $a^2 = 3$, $b^2 = 2$.
La hipérbola es $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$,

d) como $a = 2$, al pasar por (3, −5),
resulta $\frac{9}{4}-\frac{25}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=20$. La hipérbola es $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{20}=1$,

e) al imponer que pase por los puntos dados resulta el sistema

$$\begin{cases} \frac{36}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{9}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1 \end{cases}$$ que, una vez resuelto, determina la hipérbola

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1/3}=1$,

f) de las condiciones del enunciado se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \frac{625}{a^2}-\frac{144}{b^2}=1 \\ \frac{b}{a}=\frac{3}{5} \end{cases}$$ que, una vez resuelto, determina la hipérbola

$\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{81}=1$.

40. Dé la definición de hipérbola. Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F = (-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(1, 5\sqrt{3})$.

La distancia focal es $2c = d(F, F') = 6$, luego $c = 3$. De las condiciones del enunciado se obtiene el sistema $\begin{cases} \frac{64}{a^2}-\frac{75}{b^2}=1 \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$ que, una vez resuelto, determina la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

41. Determina los elementos y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:
a) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{25}=1$ b) $x^2 - 18y^2 = 36$
c) $\frac{(x+2)^2}{169}-\frac{(y-1)^2}{120}=1$ d) $\frac{y^2}{25}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$

a) Centrada en el origen; eje real, el eje OX; $a = 13$, $b = 5$, $c = \sqrt{194}$, asíntotas $y=\pm\frac{5}{13}x$;

b) Centrada en el origen; eje real, el eje OX; $a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{38}$, asíntotas $y=\pm\frac{5}{13}x$;

c) Centrada en el punto (−2, 1); eje real paralelo al eje OX; $a = 13$, $b = \sqrt{120}$, $c = 17$, asíntotas $y=\pm\frac{\sqrt{120}}{13}x$;

d) Centrada en el punto (3,0); eje real paralelo al eje OY; $a = 5$, $b = 2$, $c = \sqrt{29}$ asíntotas $y=\pm\frac{2}{5}x$.

42. a) Halla el valor de k para que la hipérbola $4x^2 - ky^2 = 9$ sea equilátera. Determina sus elementos.

b) Halla la ecuación de una hipérbola equilátera de distancia focal 12.
c) Determina los elementos de la hipérbola $xy = 32$.

a) Para que sea equilátera, $k = 4$. Para este valor, es $a=b=\frac{3}{2}$ y $c=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

b) Como $2c = 12$, es $c = 6$; por tanto, $a=\frac{6}{\sqrt{2}}$. Su ecuación reducida es $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1$. Referida a sus asíntotas, su ecuación es $xy = 9$.

c) Se trata de una hipérbola equilátera. Como $\frac{a^2}{2}=32$, se obtiene que $a = b = 8$; $c=8\sqrt{2}$.

43. Determina la posición relativa de la hipérbola $2x^2 - 3y^2 = 6$ y la recta $x + y = 5$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x^2-3y^2=6 \\ x+y=5 \end{cases}$ se obtiene como solución los puntos $P(3, 2)$ y $Q(27, -22)$. Luego la recta corta a la hipérbola en estos dos puntos.

44. Calcula la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $2x^2 - y^2 = 2$ en el punto $P(3, 4)$.

Las rectas que pasan por P son de la forma $y - 4 = m(x - 3)$. Imponiendo que el sistema $\begin{cases} 2x^2-y^2=2 \\ y-4=m(x-3) \end{cases}$ tenga solución única resulta $m=\frac{3}{2}$. La recta tangente es, por tanto,

$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 3) \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$.

La normal es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, luego su ecuación es $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Leftrightarrow$ $2x + 3y - 18 = 0$.

45. Identifica las siguientes cónicas y determina sus elementos:
a) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 3 = 0$,
b) $5x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$,
c) $x^2 - 3y^2 - 6y - 9 = 0$,
d) $5y^2 - 16x^2 - 64x - 10y - 139 = 0$.

Completando cuadrados en cada caso, se obtiene:

a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{6}=1$; elipse centrada en el punto $(3, -1)$ y cuyo eje mayor es paralelo al eje OX. Además, $a = 3$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}$.

b) $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$; elipse centrada en el punto $(-1, 2)$ y cuyo eje mayor es paralelo al eje OY. Además, $a=\sqrt{5}$, $b = 1$, $c = 2$.

c) $\frac{x^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$; hipérbola centrada en el punto $(0, -1)$ y cuyo eje real es paralelo al eje OX. Además, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{8}$.

d) $\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{5}=1$; hipérbola centrada en el punto $(-2, 1)$ y cuyo eje real es paralelo al eje OY. Además, $a = 4$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{21}$.

46. Sea H la hipérbola $xy = 4$. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias, ambas con centro en el origen de coordenadas y tales que:
a) C_1 es tangente a la hipérbola.
b) C_2 corta a la hipérbola H en un punto de abscisa 1.
Representa gráficamente las tres cónicas anteriores y calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias.

La representación gráfica es:

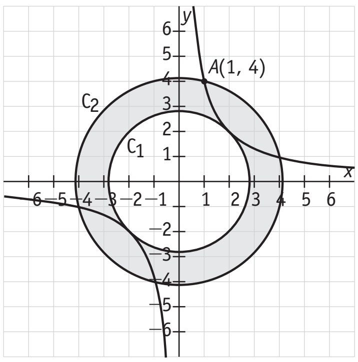


Fig. 11.4.

Como las circunferencias están centradas en el origen, sus ecuaciones son del tipo $x^2 + y^2 = r^2$.

Como C_1 es tangente a la hipérbola, el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ xy=4 \end{cases}$ debe tener solución única. Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, se obtiene $x^2+\frac{16}{x^2}=r^2 \Rightarrow$ $x^4 - r^2x^2 + 16 = 0$. Para que tenga solución única, $r^4 - 64 = 0$ $\Rightarrow r=\sqrt[4]{64}=\sqrt{8}$. Luego C_1: $x^2 + y^2 = 8$.

Como C_2 corta a la hipérbola H en un punto de abscisa $1 \Leftrightarrow C_2$ pasa por el punto $A(1, 4)$. Su radio es $r = d(O, A) = \sqrt{17}$. Luego C_2: $x^2 + y^2 = 17$.

El área de la corona circular es $A = \pi(17-8)=9\pi$ u².

Tipo IV. Parábolas

47. En cada caso, halla la ecuación y los restantes elementos de las parábolas:
a) directriz $x = 0$, vértice $(2, 3)$,
b) foco $F(5, 2)$, vértice $V(5, -3)$,
c) directriz $y = 2$, foco $F(0, 1)$,
d) eje $y = 3$, foco $F(-1, 3)$, parámetro 6 y ramas hacia la derecha.

	Foco	Directriz	Eje	Vértice	Parámetro	Ecuación
a)	$F(4, 3)$	$x = 0$	$y = 3$	$V(2, 3)$	$p = 4$	$(y - 3)^2 = 8(x - 2)$
b)	$F(5, 2)$	$y = -8$	$x = 5$	$V(5, -3)$	$p = 10$	$(x - 5)^2 = 20(y + 3)$
c)	$F(0, 1)$	$y = 2$	$x = 0$	$C\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$p = 1$	$x^2=-2\left(y-\frac{3}{2}\right)$
d)	$F(-1, 3)$	$x = -7$	$y = 3$	$V(-4, 3)$	$p = 6$	$(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

48. Encuentra la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = x$ y cuyo foco es el punto (2, 0).

Sea $F(2, 0)$ y δ: $y = x$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola buscada es $d(P, F) = d(P, \delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right|$. Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes resulta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 8 = 0$.

49. Determina el foco, la directriz, el eje, el vértice y el parámetro de las siguientes parábolas:
a) $y^2 = 8x$ **b) $y^2 = -4x$**
c) $x^2 = 4y$ **d) $x^2 = -8y$**
e) $(y-3)^2 = 8(x+1)$ **f) $(x-5)^2 = 24y$**

	Ecuación	Foco	Directriz	Eje	Vértice	Parámetro
a)	$y^2 = 8x$	$F(2, 0)$	$x = -2$	$y = 0$	$V(0, 0)$	$p = 4$
b)	$y^2 = -4x$	$F(-1, 0)$	$x = 1$	$y = 0$	$V(0, 0)$	$p = 2$
c)	$x^2 = 4y$	$F(0, 1)$	$y = -1$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$p = 2$
d)	$x^2 = -8y$	$F(0, -2)$	$y = 2$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$p = 4$
e)	$(y-3)^2 = 8(x+1)$	$F(1, 3)$	$x = -3$	$y = 3$	$V(-1, 3)$	$p = 4$
f)	$(y-5)^2 = 24y$	$F(5, 6)$	$y = -6$	$x = 5$	$V(5, 0)$	$p = 12$

50. La parábola de ecuación $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentre su directriz.

Completando cuadrados, la ecuación puede escribirse como $(y-2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$. El eje de la parábola es la recta $y = 2$ (paralelo al eje OX); su vértice es $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$. Como el vértice dista lo mismo del foco que de la directriz, y ésta es perpendicular al eje, la directriz es la recta $\delta : x = -3$.

51. Calcula la ecuación de una parábola
a) de eje paralelo al eje OY, vértice en el eje OX, que pase por (4, 2) y (−2, 8),
b) de eje paralelo al eje OX, que pasa por los puntos (2, 0), (5, 6) y (5, −2).

a) El vértice es de la forma $V(a, 0)$. Por tener eje paralelo al OY, su ecuación es del tipo $(x-a)^2 = 2py$. Imponiendo que pase por los dos puntos dados resulta el sistema $\begin{cases}(4-a)^2 = 4p\\(-2-a)^2 = 16p\end{cases}$ cuyas soluciónes son: $a = 10$, $p = 9$ y $a = 2$, $p = 1$. Luego las parábolas son $(x-10)^2 = 18y$; $(x-2)^2 = 2y$.

b) La parábola será del tipo $x = ay^2 + by + c$. Imponiendo que pase por los tres puntos mencionados se obtiene el sistema $\begin{cases}c = 2\\5 = 36a + 6b + c\\5 = 4a - 2b + c\end{cases}$, cuya solución es $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$, $c = 2$.

La parábola es $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 2$.

52. Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola $(x-1)^2 = 2(y-2)$ en el punto $P(3, 4)$.

Las rectas que pasan por P son de la forma $y - 4 = m(x-3)$.

Imponiendo que el sistema $\begin{cases}(x-1)^2 = 2(y-2)\\y-4 = m(x-3)\end{cases}$ tenga solución única resulta $m = 2$.

La recta tangente es, por tanto, $y - 4 = 2(x-3) \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$.

La normal es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, luego su ecuación es $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$.

53. Calcula las ecuaciones de las dos rectas del plano que pasan por el punto $P = (1, -1)$ y que son tangentes a la parábola $y = (x-1)^2$.

Las rectas que pasan por P son de la forma $y + 1 = m(x-1)$.

Imponiendo que el sistema $\begin{cases}y = (x-1)^2\\y+1 = m(x-1)\end{cases}$ tenga solución única resulta $m\begin{cases}2\\-2\end{cases}$

Las rectas buscadas son, por tanto, $\begin{cases}y+1 = 2(x-1)\\y+1 = -2(x-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y-3 = 0\\2x+y-1 = 0\end{cases}$.

54. Calcula la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la recta $2x + y - 2 = 0$ con la parábola $(x-2)^2 = 2(y+2)$.

Los puntos de corte son las soluciones del sistema $\begin{cases}(x-2)^2 = 2(y+2)\\2x+y-2 = 0\end{cases}$, es decir los puntos $P(2, -2)$ y $Q(-2, 6)$. La longitud de este segmento es $d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 4\sqrt{5}u$.

55. Determina el foco, la directriz, el eje y el vértice de las parábolas:
a) $x^2 - 4x - 2y - 2 = 0$,
b) $y^2 - 8x + 16 = 0$,
c) $y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.

Completando cuadrados, las parábolas se pueden escribir:

a) $(x-2)^2 = 2(y+3)$; su vértice es $V(2, -3)$; eje $x = 2$; foco $F\left(2, -\frac{5}{2}\right)$; directriz $\delta : y = -\frac{7}{2}$,

b) $y^2 = 8(x-2)$; su vértice es $V(2, 0)$; eje $y = 0$; foco $F(4, 0)$; directriz $\delta : x = 0$,

c) $(y-2)^2 = -6(x-1)$; su vértice es $V(1, 2)$; eje $y = 2$; foco $F\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; directriz $\delta : x = \frac{5}{2}$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 12 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes de coordenadas.

$x - y = 0$; $x + y = 0$

2. Escribe la ecuación de dos circunferencias concéntricas, con centro en $C(2, -1)$ y radios 1 y 2.

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

3. Dibuja la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ y da la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $P(1, -2)$.

$y + 2 = 0$

4. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro determinado por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -4)$.

$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

5. Haz un esbozo de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

6. Halla los focos y la excentricidad de la elipse dada por la ecuación anterior.

$F(\sqrt{7}, 0)$, $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

7. Haz un esbozo de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

8. Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ son las rectas:

a) $y=\pm\frac{3}{4}x$ b) $y=\pm\frac{4}{3}x$ c) $y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}x$

c) $y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}x$

9. El parámetro de la parábola $(x - 1)^2 = 5y$ es:
a) $p = 5$ b) $p = 10$
c) $p=\frac{5}{2}$

c) $p=\frac{5}{2}$

10. La directriz de la parábola $y^2 = -8x$ es la recta:
a) $y = 2$ b) $x = 2$
c) $x = -2$

b) $x = 2$

2 cuestiones para investigar

1. Se llaman circunferencias focales de la elipse a las que tienen por centro uno de sus focos y como radio el eje mayor.
a) Determina las ecuaciones de las circunferencias focales asociadas a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
b) ¿Qué cónica es *el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una circunferencia y de un punto fijo interior a la circunferencia*?

a) En esta elipse el semieje mayor es $a = 5$; los focos son los puntos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.
El radio de ambas circunferencias focales es $r = 2a = 10$.
La ecuación de la circunferencia de centro el foco $F(4, 0)$ es: $(x - 4)^2 + y^2 = 100$.
La de centro el foco $F'(-4, 0)$ tiene por ecuación $(x + 4)^2 + y^2 = 100$.
b) Es una elipse: la circunferencia es una de las circunferencias focales y el punto fijo interior es el otro foco.

Actividades

1. Determina la expresión del término general de las siguientes sucesiones:
a) 1, 4, 9, 16, 25, ...
b) 5, 10, 15, 20, 25, ...
c) $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots$
Halla el valor de los términos a_{12}, b_{100} y c_{30}.

a) Es la sucesión de cuadrados: $a_n = n^2 \Rightarrow a_{12} = 12^2 = 144$
b) Es la sucesión de los múltiplos de 5: $b_n = 5n \Rightarrow b_{100} = 500$
c) En el numerador tenemos los números impares, en el denominador los cuadrados:
$c_n = \frac{2n-1}{n^2} \Rightarrow c_{30} = \frac{59}{900}$

2. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ es decreciente. Comprueba que está acotada inferiormente por $k = 1$.

Hay que ver que $a_n > a_{n+1}$.
Esto es: $a_{n+1} = \frac{(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{n+4}{n+2} < \frac{n+3}{n+1} = a_n$.
En efecto, multiplicando en cruz:
$(n+4)\cdot(n+1) < (n+2)\cdot(n+3) \Rightarrow n^2+5n+4 < n^2+5n+6$, que es cierto, pues $4 < 6$.
Veamos que $a_n \geqslant 1$. En efecto, $\frac{n+3}{n+1} \geqslant 1$ pues el numerador es siempre mayor que el denominador.

3. Dada la sucesión $a_n = \frac{n-3}{4n+1}$:
a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente por $k = 1/4$.
b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n > 0{,}249$?
c) Di cuál es su límite (no hace falta que lo demuestres).

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{4n+5} - \frac{n-3}{4n+1} =$
$= \frac{(n-2)(4n+1)-(n-3)(4n+5)}{(4n+5)(4n+1)} = \frac{13}{(4n+5)(4n+1)}$
expresión que siempre toma valores positivos. Por tanto la sucesión es creciente.
Acotada: $a_n = \frac{n-3}{4n+1} \leqslant \frac{1}{4}$ para todo n, pues
$4n - 12 \leqslant 4n + 1$, como resulta evidente.
b) $a_n > 0{,}249 \Leftrightarrow \frac{n-3}{4n+1} > 0{,}249 \Rightarrow n - 3 > 0{,}996n + 0{,}249 \Rightarrow$
$0{,}004n > 3{,}249 \Rightarrow n > 812{,}25$.
A partir del término a_{813} todos los siguientes son mayores que 0,249.
c) Su límite es 0,25.

4. Indica el límite de las siguientes sucesiones:
a) $a_n = \frac{2n+1}{n+7}$ **b) $a_n = \frac{3n^2+1}{5n+10}$**
c) $a_n = \frac{n+4}{n^2-n+3}$

a) $lím \frac{2n+1}{n+7} = 2$. Numerador y denominador tienen el mismo grado.
b) $lím \frac{3n^2+1}{5n+10} = \infty$. El grado del numerador es mayor que el del denominador.
c) $lím \frac{n+4}{n^2-n+3} = 0$. El grado del numerador es menor que el del denominador.

5. Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:
a) −8, −5, −2, 1, ...,
b) 3, 9, 15, 21, ...
c) 1/2, 1, 3/2, 2, ...
Para cada caso halla el término vigésimo séptimo.

a) $d = 3 \Rightarrow a_n = -8+3(n-1) = 3n-11 \Rightarrow a_{27} = 70$
b) $d = 6 \Rightarrow b_n = 3+6(n-1) = 6n-3 \Rightarrow b_{27} = 159$
c) $d = 3 \Rightarrow c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = 0{,}5n \Rightarrow c_{27} = 13{,}5$

6. Halla las siguientes sumas:
a) $3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}5 + \ldots$(175 términos)
b) $70 + 67 + 64 + \ldots$ (100 términos)

a) Es una progresión aritmética de diferencia 0,5.
Como $a_1 = 3$ y $a_{175} = 3 + 174 \cdot 0{,}5 = 90$, se tendrá:
$S = \frac{(3+90)\cdot 175}{2} = 8\,137{,}5$.
b) Es una progresión aritmética de diferencia −3.
Como $a_1 = 70$ y $a_{100} = 70 + 99 \cdot (-3) = -227$, se tendrá:
$S = \frac{(70-227)\cdot 100}{2} = -7\,850$.

7. Halla las siguientes sumas:
a) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ (20 términos)
b) $10 - 5 + 2{,}5 - 1{,}25 + \ldots$ (infinitos términos)

a) $r = 2 \Rightarrow S = \frac{1\cdot(2^{20}-1)}{2-1} = 1\,048\,575$
b) $r = -1/2 \Rightarrow S = \frac{10}{1-(-1/2)} = \frac{10}{3/2} = \frac{20}{3}$

Problemas propuestos

Tipo I. Sucesiones

1. Halla el término siguiente de cada una de las sucesiones:
a) 0, 9, 18, 27, 36, ... **b) 0, 9, 17, 24, 30, ...**
c) 1, 9, 18, 28, 39, ... **d) 1, 9, 10, 19, 20, ...**

a) 45
b) $30 + 5 = 35$ (cada vez se suma uno menos.)
c) $39 + 12 = 51$ (cada vez se suma uno más)
d) 30; y el siguiente sería 31.

2. Para las sucesiones a) y b) del problema anterior: (1) Da el término general de la a); (2) ¿Es creciente la b)?

(1) $a_{n+1}=9n-1$
(2) Como cada vez se suma uno menos, llegará un momento en que se restará. Puede verse que: $a_7=39$ y sigue: 42, 44, 45, 45, 44, 42, ...

3. Dadas las sucesiones:
a) 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...
b) 1, 10, 100, 1000, ...
Para cada una de ellas: (1) halla su término general; (2) sus cotas superior e inferior, si las tienen.

a) $a_n=\frac{1}{n}$.
Sus cotas son: inferior, 0; superior, 1.
Es evidente, pues $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$, ya que $n\geqslant 1$.
b) $a_n=10^{n-1}$.
Está acotada inferiormente por 1. No tiene cota superior, pues $10^K>K$ para cualquier valor de K grande.

4. ¿A cuál de las siguientes sucesiones pertenecen los números: 546, 27, 1201?
a) $\{a_n\}=\{1, 7, 13, 19, ...\}$
b) $b_n=4n-3$
c) $c_n=2n^2-3n+7$

Un número pertenece a una sucesión cuando se obtiene de su expresión general para algún valor de n. Esto es, un número k pertenece a la sucesión a_n cuando la ecuación $a_n=k$ tiene por solución un número natural.
a) La sucesión $a_n=6n-5$.
Como $6n-5=546 \Rightarrow n=91{,}83$ no es natural, 546 no es de la sucesión a_n.
Como $6n-5=27 \Rightarrow n=5{,}33$ no es natural, 27 no es de la sucesión a_n.
Como $6n-5=1\,201 \Rightarrow n=201$, el número 1 201 es el término a_{201} de la sucesión a_n.
b) $4n-3=546 \Rightarrow n=137{,}25$; por tanto 546 no es de la sucesión b_n.
$4n-3=27 \Rightarrow n=7{,}5$; por tanto 27 no es de la sucesión b_n.
$4n-3=1\,201 \Rightarrow n=301$; por tanto 1 201 es el término b_{301} de la sucesión b_n.
c) La ecuación $2n^2-3n+7=546 \Leftrightarrow 2n^2-3n-539=0$, que no tiene solución natural; por tanto, 546 no es de la sucesión c_n.
La ecuación $2n^2-3n+7=27 \Leftrightarrow 2n^2-3n-20=0$, que tiene por solución $n=4$; por tanto, 27 es el término c_4 de la sucesión c_n.
La ecuación $2n^2-3n+7=1\,201 \Leftrightarrow 2n^2-3n-1\,194=0$, que no tiene solución natural; por tanto, 1 201 no es de la sucesión c_n.

5. ¿Cómo es la sucesión $a_n=\frac{n+3}{n+1}$: creciente o decreciente? Con la información obtenida halla sus cotas inferior y superior.

Comparamos a_n y a_{n+1}.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)+3}{(n+1)+1}-\frac{n+3}{n+1}=\frac{n+4}{n+2}-\frac{n+3}{n+1}=$$

$$=\frac{(n+4)(n+1)-(n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$$

$=\frac{-2}{(n+2)(n+1)}$, que toma valores negativos para todo n.

Por tanto, la sucesión es decreciente.

Si es decreciente, el mayor término es $a_1=\frac{1+3}{1+1}=2$. Luego $k=2$ es una cota superior.

Como el numerador de la fracción $\frac{n+3}{n+1}$ es siempre mayor que el denominador, $n+3>n+1$, una cota inferior será 1; esto es $\frac{n+3}{n+1}\geqslant 1$.

6. La división entera de cualquier número natural entre 4 da de resto 0, 1, 2 o 3. Escribe las cuatro sucesiones que se obtienen atendiendo a cada uno de esos restos. Halla el término general de cada una de ellas. Indica a cuál de ellas pertenecen los números 12 401, 2 453 y 571.

Sucesión de números con resto 0: 0, 4, 8, 12, ... $\Rightarrow 4n-4$
Sucesión de números con resto 1: 1, 5, 9, 13, ... $\Rightarrow 4n-3$
Sucesión de números con resto 2: 2, 6, 10, 14, ... $\Rightarrow 4n-2$
Sucesión de números con resto 3: 3, 7, 11, 15, ... $\Rightarrow 4n-1$
En las sucesiones anteriores, $n\geqslant 1$.
NOTA: Si suponemos que $n\geqslant 0$, los términos generales serán, respectivamente: $4n$; $4n+1$; $4n+2$; $4n+3$.
Con esto:
$12\,401=4\cdot 3\,100+1$; $2\,453=4\cdot 613+1$; $571=4\cdot 142+3$

7. Halla el término general de las siguientes sucesiones:
a) 1, 4, 9, 16, ...
b) 1/2, 4/3, 9/4, 16/5, ...
c) 2/4, 5/6, 10/8, 17/10, ...
d) 1, −4, 9, −16, ...

a) $a_n=n^2$
b) $a_n=\frac{n^2}{n+1}$
c) $a_n=\frac{n^2+1}{2(n+1)}$
d) $a_n=(-1)^{n-1}n^2$

8. a) Definición de cota superior de una sucesión de números reales. Definición de sucesión acotada inferiormente.
b) Demuestre que la sucesión de término general $a_n=\frac{4n-1}{n+1}$ es creciente y halle una cota inferior positiva (justificando que es una cota inferior.)

a) Un número k es cota superior de una sucesión (a_n) si para cualquier valor de n el término $a_n\leqslant k$.
Una sucesión (a_n) está acotada inferiormente si existe un número k tal que $k\leqslant a_n$ para cualquier valor de n.
b) Una sucesión es creciente si $a_n\leqslant a_{n+1}$ para todo n.

$$\frac{4n-1}{n+1}\leqslant\frac{4(n+1)-1}{(n+1)+1}\Leftrightarrow\frac{4n-1}{n+1}\leqslant\frac{4n+3}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4n-1)(n+2)\leqslant(n+1)(4n+3)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4n^2+7n-2 \leqslant 4n^2+7n+3 \Leftrightarrow -2 \leqslant 3$

Como la última desigualdad es cierta también lo será la primera. Por tanto, la sucesión dada es creciente.

Al ser creciente, el primer término es el menor de todos. En consecuencia, una cota inferior es $a_1=\dfrac{4-1}{1-1}=\dfrac{3}{2}$.

Tipo II. Límites de sucesiones

9. Dada la sucesión {2, 3/4, 4/9, 5/16, 6/25, ...}, halla:
a) A partir de qué término $a_n < 0{,}001$
b) ¿Cuál es su límite?

a) $a_n < 0{,}001 \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{n^2} < 0{,}001 \Rightarrow n+1 < 0{,}001n^2 \Rightarrow$

$n^2-1000n-1000 > 0 \Rightarrow n \geqslant 1001.$

b) $\text{lím}\ \dfrac{n+1}{n^2}=0$

10. Demuestra que $a_n=\dfrac{1}{n}$ tiende a 0, comprobando que para todo número $\varepsilon>0$ y pequeño, existe un n_0 tal que para todo $n>n_0$, se cumple que $|a_n|<\varepsilon$. ¿Qué valor tomará n_0 si $\varepsilon=0{,}001$?

$|a_n|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}$

Para $\varepsilon=0{,}001$, $n_0=\dfrac{1}{0{,}001}=1000$.

Esto significa que todos los términos siguientes a a_{1000} están a menos de 0,001 de 0.

11. Lo mismo que en el problema anterior para $a_n=\dfrac{1}{n^2}$

$|a_n|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n^2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$

Para $\varepsilon=0{,}001$, $n_0=\sqrt{1000}=31{,}6$.

Esto significa que todos los términos siguientes a a_{31} están a menos de 0,001 de 0.

12. Considera las sucesiones: $\{a_n\}=\{1, 7, 13, 19, \ldots\}$ y $\{b_n\}=\{5, 8, 11, 14, \ldots\}$
a) Halla el término general de cada una de ellas. ¿Cuánto valen a_{300} y b_{35}?
b) Halla la expresión de la sucesión $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$. ¿A partir de qué término de $\{c_n\}$ los siguientes valen más de 1,9? Calcula su límite.

a) Para $\{a_n\}=\{1, 7, 13, 19, \ldots\}$, cada uno de los términos dados se obtiene sumando 6 al anterior. Por tanto $a_n=6n-5$.
Para $\{b_n\}=\{5, 8, 11, 14, \ldots\}$, cada uno de esos números se obtiene sumando 3 al anterior. Por tanto $b_n=3n+2$.

b) $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{6n-5}{3n+2}$.

$c_n>1{,}9 \Leftrightarrow \dfrac{6n-5}{3n+2}>1{,}9 \Rightarrow 6n-5>5{,}7n+3{,}8 \Rightarrow$

$0{,}3n>8{,}8 \Rightarrow n>29{,}33\ldots$

Luego $c_n>1{,}9$ a partir de $n=30$.

Vamos a calcular el límite transformando la sucesión dada:

$$\text{lím}\left(\frac{6n-5}{3n+2}\right)=\text{lím}\left(\frac{\dfrac{6n}{n}-\dfrac{5}{n}}{\dfrac{3n}{n}+\dfrac{2}{n}}\right)=\text{lím}\left(\frac{6-\dfrac{5}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}\right)=\frac{6}{3}=2$$

13. Indica el valor de los siguientes límites:

a) $\text{lím}\ (2n-5)$ **b) $\text{lím}\ \dfrac{6n}{n^2+1}$**

c) $\text{lím}\ \dfrac{6n^2+3n}{2n^2-7n+1}$ **d) $\text{lím}\ [(-1)^n n^2-5n]$**

e) $\text{lím}\ \dfrac{n-5}{3-2n}$ **f) $\text{lím}\ \dfrac{-n^2+1}{2n+7}$**

a) $\text{lím}\ (2n-5)=\infty$ (Sucesión de tipo polinómico)

b) $\text{lím}\ \dfrac{6n}{n^2+1}=0$ (El grado del numerador es menor que el del denominador).

c) $\text{lím}\ \dfrac{6n^2+3n}{2n^2-7n+1}=\dfrac{6}{2}=3$ (Numerador y denominador tiene el mismo grado).

d) $\text{lím}\ [(-1)^n n^2-5n]$ no existe, tiende alternativamente a $+\infty$ y a $-\infty$.

e) $\text{lím}\ \dfrac{n-5}{3-2n}=-\dfrac{1}{2}$ (Numerador y denominador tiene el mismo grado).

f) $\text{lím}\ \dfrac{-n^2+1}{2n+7}=-\infty$ (El grado del numerador es mayor que el del denominador).

Tipo III. Progresiones aritméticas

14. Halla el término cuadragésimo octavo de la progresión aritmética de diferencia 3 y primer término 11.

El término general es $a_n=11+3(n-1)=3n+8$. Por tanto $a_{48}=3\cdot 48+8=152$.

15. Halla el término general de la progresión aritmética de diferencia 5 y $a_8=19$. ¿Cuánto vale el término cuadragésimo octavo?

Como $a_8=a_1+7d \Rightarrow 19=a_1+7\cdot 5 \Rightarrow a_1=-16$
Su término general será: $a_n=-16+5(n-1)=5n-21$.
Por tanto: $a_{48}=5\cdot 48-21=219$.

16. Intercala 4 términos en progresión aritmética entre 110 y 150.

Si se intercalan 4 términos, en total habrá seis, con $a_1=110$ y $a_6=150$.
Como $a_6=a_1+5d \Rightarrow 150=110+5d \Rightarrow 5d=40 \Rightarrow d=8$.
La progresión será: 110, 118, 126, 134, 142, 150

17. Intercala 6 términos en progresión aritmética entre 80 y 124.

Si se intercalan 6 términos, en total habrá ocho, con $a_1=80$ y $a_8=124$.

Como $a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow 124 = 80 + 7d \Rightarrow d = 44/7$.
La progresión será:
$80,\ 80+\frac{44}{7}=\frac{604}{7},\ 80+2\cdot\frac{44}{7}=\frac{648}{7},\ \frac{692}{7},\ \frac{736}{7},\ \frac{780}{7},\ \frac{894}{7},$
$\frac{868}{7}=124.$

18. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, hállalos si el mayor vale 100º.

$100 + 100 - d + 100 - 2d = 180 \Rightarrow 300 - 180 = 3d \Rightarrow$
$d = 120/3 = 40$.
Los ángulos valdrán 100º, 60º y 20º.

19. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, hállalos si el menor vale 48º.

$48 + 48 + d + 48 + 2d = 180 \Rightarrow 3d = 180 - 144 \Rightarrow$
$d = 36/3 = 12$.
Los ángulos valdrán 48º, 60º y 72º.

20. Demuestra que si los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, entonces uno de los tres tiene que valer 60º.

Si el ángulo intermedio vale α, los otros dos valdrán $\alpha - d$ y $\alpha + d$.
Como $\alpha - d + \alpha + \alpha + d = 180º \Rightarrow 3\alpha = 180º \Rightarrow \alpha = 60º$.

21. De una progresión aritmética se sabe que $a_4 = 2$ y $d = 0{,}6$. Halla:
a) a_1 y a_{15}.
b) La suma de los quince primeros términos.

a) $a_4=a_1+3d \Rightarrow\ 2=a_1+3\cdot 0{,}6 \Rightarrow a_1=0{,}2$
Por tanto, $a_{15}=0{,}2+14\cdot 0{,}6=8{,}6$
b) $S=\frac{(0{,}2+8{,}6)\cdot 15}{2}=66$

22. Halla los lados de un triángulo rectángulo si se sabe que están en progresión aritmética de diferencia 3 cm.

La medida de los lados será: a, $a + 3$ y $a + 6$, siendo este último la hipotenusa.
Por Pitágoras:
$(a+6)^2=(a+3)^2+a^2 \Rightarrow a^2-6a-27=0 \Rightarrow a = 9$ (la solución $a = -3$ no tiene sentido).
Los lados miden 9, 12 y 15 cm.

23. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Hállalos sabiendo que su hipotenusa vale 15 cm.

Si d es la diferencia de la progresión, los catetos serán $15 - d$ y $15 - 2d$.
Por Pitágoras:
$15^2=(15-d)^2+(15-2d)^2 \Rightarrow d^2-18d+45=0 \Rightarrow d = 3$ (la solución $d = 15$ no tiene sentido).
Los lados medirán: 15, 12 y 9 cm.

24. ¿Cuánto vale la media (aritmética) de tres términos consecutivos de una progresión aritmética?

Si la diferencia es d y a es el primero de esos términos, los dos siguientes serán $a+d$ y $a+2d$.
Su media aritmética es:
$\frac{a+(a+d)+(a+2d)}{3}=\frac{3a+3d}{3}=a+d.$
Esto es, el término central.

25. Descompón el número 48 en tres sumandos que estén en progresión aritmética. Si hay más de una solución, da tres de ellas.

Sea a el término central. Se cumple que $3a=48 \Rightarrow a = 16$. Nada podemos decir de la diferencia de la progresión; por tanto hay infinitas posibilidades. Tres de ellas son:
10, 16 y 22, con $d = 6$;
16, 16 y 16, con $d = 0$;
-2, 16 y 34, con $d = 18$.

26. Descompón el número 168 en tres sumandos que estén en progresión aritmética de diferencia 6.

Sea a el término central. Se cumple que $3a=168 \Rightarrow a = 56$.
Los otros dos términos serán $56 - 6 = 50$ y $56 + 6 = 62$.

27. Suma 200 + 201 + 202 + ... + 299

Es la suma de 100 números consecutivos.
$S=\frac{(200+299)\cdot 100}{2}=24\,950$

28. Halla los seis primeros números naturales que al dividirlos por 7 dan de resto 3. Comprueba que están en progresión aritmética. ¿Cuál es la expresión general de todos los números naturales que al dividirlos por 7 dan de resto 3?

Serán: 3, 10, 17, 24, 31 y 38. Efectivamente están en progresión aritmética de diferencia 7.
Su término general es: $a_n=3+(n-1)\cdot 7=7n-4$.

29. La suma de tres números que están en progresión aritmética es 48. Hállalos si además se sabe que el mayor menos el mediano, menos el doble del pequeño es igual a 1.

Sea x, y, z los números.
Se cumple que:
$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ z-y-2x=1 \end{cases}$$
Como $y = x + d$ y $z = x + 2d$, sustituyendo queda:
$$\begin{cases} x+x+d+x+2d=48 \\ x+2d-(x+d)-2x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3d=48 \\ -2x+d=1 \end{cases} \Rightarrow x = 5;\ d = 11.$$
Los números son: 5, 16 y 27.

Tipo IV. Progresiones geométricas

30. Halla el término octavo de la progresión geométrica de razón 0,5 y primer término 32.

El término general es $a_n=a_1r^{n-1}$. Por tanto $a_8=32\cdot 0{,}5^7=\frac{2^5}{2^7}=\frac{1}{4}$.
$a_n=32\cdot 0{,}5^{n-1}=\frac{2^5}{2^{n-1}}=2^{6-n}$.

31. ¿Pueden los números 4, 6 y 9 ser términos consecutivos de una progresión? Si es así, da los dos siguientes términos.

No son de una progresión aritmética, pues $6-4\neq 9-6$.

Son de una progresión geométrica, pues $r=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

Los dos términos siguientes serán $3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ y $\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8}$.

32. Descompón el número 64 en tres factores que estén en progresión geométrica.

Sea a el término central. Se cumple que $a^3=64 \Rightarrow a=4$. Nada podemos decir de la razón de la progresión; por tanto hay infinitas posibilidades. Tres de ellas son:
2, 4 y 8, con $r=2$;
4, 4 y 4, con $r=1$;
-1, 4 y -16, con $r=-4$.

33. Descompón el número 1 000 en producto de tres números que estén en progresión geométrica de razón 5.

Sea a el término central. Se cumple que $a^3=1\,000 \Rightarrow a=10$.
Si $r=5$, los otros dos términos son $10:5=2$ y $10\cdot 5=50$.

34. Halla la suma 4 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + ... (infinitos términos). ¿Coincide con la fracción generatriz del número periódico $4,\widehat{4}$?

Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón 0,1 y primer término igual a 4: $a_1=4$, $r=0{,}1$.
Por tanto:

$$4+0{,}4+0{,}04+0{,}004+\ldots=\frac{4}{1-0{,}1}=\frac{4}{0{,}9}=\frac{40}{9}$$

Es evidente que coincide con la fracción generatriz de $4,\widehat{4}$, pues $4+0{,}4+0{,}04+0{,}004+\ldots=4{,}444\ldots=4,\widehat{4}$.

35. Aplicando la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica halla las fracciones generatrices de las siguientes fracciones:
a) 12,121212... b) 0,313131... c) 4,5313131...

a) $12{,}121212\ldots=12+0{,}12+0{,}0012+\ldots=$
$$=\frac{12}{1-0{,}01}=\frac{12}{0{,}99}=\frac{1\,200}{99}$$

b) $0{,}313131\ldots=0{,}31+0{,}0031+0{,}000031+\ldots=$
$$=\frac{0{,}31}{1-0{,}01}=\frac{0{,}31}{0{,}99}=\frac{31}{99}$$

c) $4{,}5313131\ldots=4{,}5+0{,}031+0{,}00031+\ldots=$
$$=4{,}5+\frac{0{,}031}{1-0{,}01}=\frac{0{,}031}{0{,}99}=\frac{31}{990}=\frac{9}{2}+\frac{31}{990}=\frac{4\,486}{990}$$

36. ¿Cuánto vale la media (geométrica) de tres términos consecutivos de una progresión geométrica?

Si la razón es r y a es el primero de esos términos, los dos siguientes serán ar y ar^2.
Su media geométrica es: $\sqrt[3]{a\cdot ar\cdot ar^2}=\sqrt[3]{a^3r^3}=ar$. Esto es, el término central.

37. Considera la siguiente sucesión indefinida de circunferencias, cuyos radios están en progresión geométrica de razón 1/2, siendo el radio del mayor 16 cm.
a) Halla la suma de las longitudes de todas ellas.
c) Halla la suma de la superficies de todos los círculos.

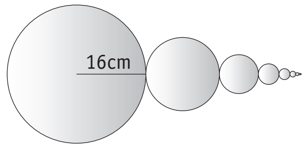


Fig. 12.1.

Hay tres sucesiones:

Sucesión de radios	16	8	4	2	… $r=1/2$
Sucesión de longitudes ($2\pi r$)	$2\pi\cdot 16=32\pi$	16π	8π	4π	… $r=1/2$
Sucesión de áreas (πr^2)	$\pi\cdot 16^2=256\pi$	64π	16π	4π	… $r=1/4$

a) $S_{Longitudes}=\dfrac{32\pi}{1-1/2}=64\pi$

b) $S_{Áreas}=\dfrac{256\pi}{1-1/4}=\dfrac{1\,024\pi}{3}$

38. Intercala un término positivo en progresión geométrica entre 10 y 250.

La progresión será: 10, $10r$, $10r^2=250 \Rightarrow r^2=25 \Rightarrow r=5$
La progresión es: 10, 50, 250

39. Intercala 2 términos en progresión geométrica entre 4 y −108.

La progresión será: 4, $4r$, $4r^2$, $4r^3=-108 \Rightarrow r^3=-27 \Rightarrow$
$r=\sqrt[3]{-27}=-3$
La solución es: 4, -12, 36, -108.

40. Intercala 3 términos en progresión geométrica entre 2 y 1250.

La progresión será: 2, $2r$, $2r^2$, $2r^3$, $2r^4=1\,250 \Rightarrow r^4=625 \Rightarrow$
$r=\sqrt[4]{625}=\pm 5$
Hay dos soluciones:
Progresión: 2, 10, 50, 250, 1 250; o bien: 2, -10, 50, -250, 1 250.

41. Una pelota cae desde 64 m de altura. Si las alturas alcanzadas en los sucesivos rebotes están en progresión geométrica de razón $\frac{3}{4}$:
a) ¿Qué altura alcanzará tras el quinto rebote?
b) ¿Cuántas veces debe rebotar para que la siguiente altura no supere 1 metro?

a) Primer bote: $a_1=64\cdot\frac{3}{4}=48$.
Después de botar cinco veces, la altura que alcanza es:
$$a_5=64\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{16}=15{,}1875$$

b) Hay que determinar n para que $a_n<1$. Esto es:

$$a_n=64\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n<1\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^n<\frac{1}{64}\Rightarrow\log\left(\frac{3}{4}\right)^n<\log\frac{1}{64}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\log\frac{3}{4}<\log\frac{1}{64}\Rightarrow \text{(como log(3/4) es negativo)}$$

$$\Rightarrow n>\frac{\log(1/64)}{\log(3/4)}=14{,}46.$$

Después del rebote décimo quinto la pelota no superará la altura de 1 m.

42. Dejamos caer una pelota desde una altura de 4 metros y, tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará la pelota después de cada uno de los cinco primeros rebotes? ¿Y tras el vigésimo rebote? ¿Y tras el rebote *n–ésimo*? Si a_n denota la altura alcanzada tras el *n–ésimo* rebote, obtenga una cota superior y otra inferior de esta sucesión. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Si a_n denota la altura alcanzada tras el *n–ésimo* rebote se tiene:

$$h=4 \quad a_1=2 \quad a_2=1 \quad a_3=\frac{1}{2} \quad a_4=\frac{1}{4} \quad a_5=\frac{1}{8}$$

Por tanto, las alturas que alcanza tras los cinco primeros rebotes son: 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ m.

Se trata de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{8}$ y primer término $a_1=2$.

La expresión del término general de la sucesión será: $a_n=2\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=2^{2-n}$, $n\geqslant 1$

La altura tras el vigésimo rebote será: $a_{20}=\frac{1}{2^{18}}$

Resulta evidente que $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$

43. Cuando x está muy próxima a 0, pongamos con $|x|<1$, ¿cuánto valdrán las sumas?:
a) $1+x+x^2+x^3+\ldots.$
b) $1-x+x^2-x^3+\ldots.$

a) $1+x+x^2+x^3+\ldots.$ Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $r=x$. Como $|r|=|x|<1$, la suma es $S=\frac{a_1}{r-1}$.

Por tanto:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{x-1}$$

b) Para $1-x+x^2-x^3+\ldots$, la razón $r=-x$, luego:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{x+1}$$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Halla el siguiente término de las sucesiones:
a) 1, 10, 18, 25, _
b) 10, 9, 7, 4, _

a) 31
b) 0

2. Halla el término general de las sucesiones:
a) 2, 20, 200, 2000, ...
b) 100, 97, 94, 91, ...

a) $2\cdot 10^{n-1}$
b) $103-3n$

3. Demuestra que la sucesión $a_n=\frac{2n-5}{n}$ es creciente.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)-5}{n+1}-\frac{2n-5}{n}=\frac{2n-3}{n+1}-\frac{2n-5}{n}=$$

$=\frac{(2n-3)n-(2n-5)(n+1)}{(n+1)n}=\frac{5}{(n+1)n}$, que toma valores positivos para todo n.

4. Halla: a) $\lim \frac{5n+3}{2n+7}$; b) $\lim \frac{n^2+3n}{2n+7}$

a) 5/2 b) ∞

5. De las siguientes sucesiones indica las que son progresiones aritméticas y halla su diferencia:
a) 3, 3,1, 3,01, 3,001, ... b) 3, 3,6, 4,2, 4,8, ...
c) 10, 9, 8, 7, ...

a) No b) 0,6 c) -1

6. De las siguientes sucesiones indica las que son progresiones geométricas y halla su razón:
a) 3, 3,1, 3,01, 3,001, ... b) 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...
c) 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

a) No b) 1/2 c) No

7. Calcula la suma de los 18 primeros términos de la progresión: 4, 9, 14, ...

837

8. Calcula la suma de los 8 primeros términos de la progresión: 1, 2, 4, 8, ...

255

9. Intercala un número en progresión geométrica entre 2 y 200.

20

10. Calcula la siguiente suma indefinida: $5+0{,}5+0{,}05+0{,}005+\ldots.$

50/9

Actividades

1. Calcula algunos pares de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<1 \\ 3-x^2 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$, represéntalos en un diagrama cartesiano y traza, uniendo los puntos, la gráfica de $f(x)$.

Si $x=-1 \Rightarrow y=0$: par $(-1, 0)$
Si $x=0 \Rightarrow y=0$: par $(0, 1)$.
Si $x=1 \Rightarrow y=2$: par $(1, 2)$.
Si $x=2 \Rightarrow y=-1$: par $(2, -1)$.
Si $x=3 \Rightarrow y=-6$: par $(3, -6)$

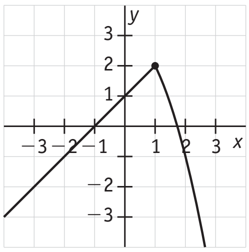


Fig. 13.1.

2. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-x^2$ **b)** $g(x)=\sqrt{3+x}$

c) $h(x)=\dfrac{3}{x^2-2x}$ **d)** $j(x)=\dfrac{-4}{x^2+2}$

a) $f(x)=-x^2$ tiene sentido para todo x. Por tanto, $\text{Dom}(f)=\mathbf{R}$.
Los valores que toma $f(x)$ son siempre menores o iguales 0: $\text{Im}(f)=[0, -\infty)$.

b) $g(x)=\sqrt{3+x}$ está definida para $x\geqslant -3$: intervalo $[-3, +\infty)$
Su recorrido serán siempre valores positivos: $\text{Im}(g)=[0, +\infty)$

c) $h(x)=\dfrac{3}{x^2-2x}$ no está definida cuando $x^2-2x=0$: $x=0$, $x=2$. $\text{Dom}(f)=\mathbf{R}-\{0, 2\}$
Esta función puede tomar valores infinitamente grandes, tanto positivos como negativos.
Luego, $\text{Im}(f)=(-\infty, +\infty)$

d) $j(x)=\dfrac{-4}{x^2+2}$ está definida para todo x, pues $x^2+2\geqslant 2$: $\text{Dom}(j)=\mathbf{R}$.
Su imagen nunca puede ser positiva ni menor que -2: $\text{Im}(j)=[-2, 0)$.

3. Contesta a las mismas preguntas en el caso de un cohete que sale hacia arriba con una velocidad de 80 m/s.

La función será $h(t)=80t-4{,}9t^2$

a) $h(2)=160-4{,}9\cdot 4=140{,}4$
b) $80t-4{,}9t^2=140{,}4 \Rightarrow 4{,}9t^2-80t+140{,}4=0 \Rightarrow$
$t=2$, $t=14{,}33$ s
c) La altura máxima la alcanza en el vértice, cuya abscisa es $x=8{,}16$, intermedia entre 2 y 14,33. Para ese valor, $h(8{,}16)=326{,}9$ m.
d) $h(t)=0 \Rightarrow t=0$, $t=80/4{,}9=16{,}32$ s.
e) Dominio $=[0, 16{,}32]$; recorrido $=[0, 326{,}9]$

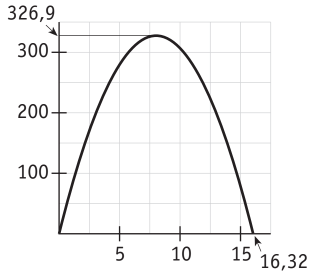


Fig. 13.2.

4. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **b)** $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x-3}}$

a) Definida cuando $x^2-9\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -3$ o $x\geqslant 3$.
$\text{Dom}(f)=(-\infty, -3] \Rightarrow [3, +\infty)$
b) La raíz cúbica está definida para cualquier número real, pero $\dfrac{2x}{x-3}$ no está definido si $x=3$.
Por tanto, $\text{Dom}(g)=\mathbf{R}-\{3\}$

5. Dadas las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, halla:

a) Las funciones compuestas: $g(f(x))$ y $f(g(x))$. ¿Son iguales?
b) Los valores correspondientes, mediante cada función compuesta, para $x=0$, $x=2$ y $x=-2$.

a) $g(f(x))=g(x^2+1)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2+1}$

$f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)=\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2+1=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}+1$

Es evidente que no son iguales.

b) $g(f(0))=\dfrac{1}{(0+1)^2+1}=\dfrac{1}{2}$;

$g(f(2))=\dfrac{1}{(2^2+1)^2+1}=\dfrac{1}{26}$;

$g(f(-2))=\dfrac{1}{((-2)^2+1)^2+1}=\dfrac{1}{26}$;

$f(g(0))=\dfrac{1}{(0+1)^2}+1=2$;

$f(g(2))=\dfrac{1}{(2^2+1)^2+1}+1=\dfrac{26}{25}$;

$f(g(-2))=\dfrac{1}{((-2^2)+1)^2}+1=\dfrac{26}{25}$

6. Halla $f^{-1}(x)$, siendo $f(x)=\dfrac{x}{2}+1$. Comprueba que $f^{-1}(f(-2))=-2$ y que $f(f^{-1}(-2))=-2$. Representa sus gráficas y comprueba que son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

$f(g(x))=\dfrac{g(x)}{2}+1=x \Rightarrow g(x)=2x-2$. Esto es: $f^{-1}(x)=2x-2$

$f^{-1}(f(-2))=f^{-1}(0)=-2$; $f(f^{-1}(-2))=f(-6)=-2$.

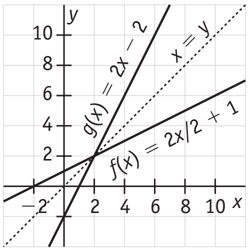


Fig. 13.3.

7. Para la función dada por la gráfica adjunta, representa las gráficas de las funciones:
$f(-x)$, $|f(x)|$; $2f(x)$; $f(2x)$;

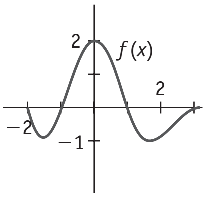


Fig. 13.4.

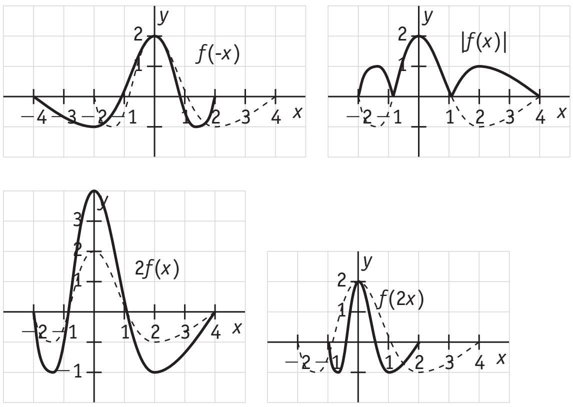


Fig. 13.5.

Problemas propuestos

Tipo I. Funciones. Dominio y recorrido

1. Determina, en cada uno de los casos, si se trata de una función o no.

a)

x	–1	0	1	2	–1
y	–5	0	5	10	15

b) $f(x) = 5x$

c)

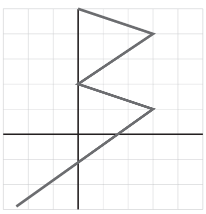


Fig. 13.6.

d)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	11	16	27

e) $f(x) = x^2 + 2$

a) No. El número -1 tiene dos imágenes.
b) Sí. El quíntuplo de un número siempre es único.
c) No. Las rectas verticales entre $x = 0$ y $x = 3$ cortan a la curva en más de un punto.
d) Sí, la correspondencia es única.
e) Sí, el valor de $x^2 + 2$ es único para cada x.

2. Indica cuáles de las siguientes relaciones definen una función:
a) A cada número le asignamos el doble.
b) A cada alumna le asignamos su estatura.
c) A cada número natural le asignamos sus múltiplos.
d) A cada ciudad le asignamos la provincia a la que pertenece.

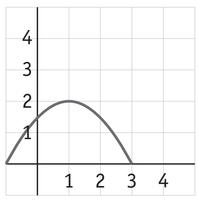
a) Sí. El doble de un número es único.
b) En cada momento sí. (Evidentemente una persona puede crecer, pero en el momento en que es medida, su estatura es única.)
c) No. Un número tiene infinitos múltiplos.
d) Sí. Cada ciudad pertenece a una sola provincia.

3. La función $V(r) = 10\pi r^2$ da el volumen de los cilindros de altura 10 y radio variable r. ¿Cuál es en esa fórmula la variable dependiente y cuál la independiente? ¿Qué volumen tiene un cilindro de altura 5?

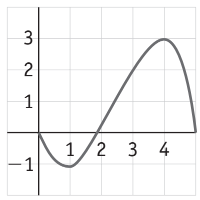
Independiente, r; dependiente, V
$V(5) = 250\pi$

4. Halla el dominio y recorrido de las funciones cuya gráfica se da a continuación:

a)



b)



c)

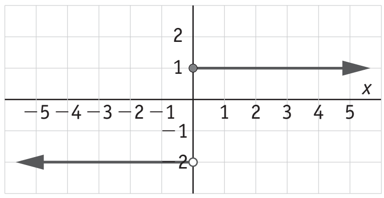


Fig. 13.7.

a) Dominio: $[-1, 3]$
Recorrido: $[0, 2]$
b) Dominio: $[0, 5]$
Recorrido: $[-1, 3]$
c) Dominio: **R**
Recorrido: $\{-1, 1\}$

5. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<-1 \\ x^2+2 & 0\leqslant x<3. \\ -x+3 & x>3 \end{cases}$

a) Indica el dominio correspondiente para cada una de las funciones que intervienen.
b) Indica su dominio de definición.
c) Haz su representación gráfica.
d) A la vista de su gráfica, indica los puntos (o intervalos) en los que la función no es continua.

a) $(-\infty, -1)$, $[0, 3)$ y $(3, +\infty)$, respectivamente.
b) Dom $= (-\infty, -1)\cup[0, 3)\cup(3, +\infty)$
c)

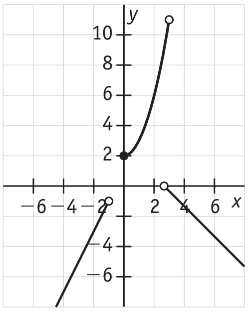


Fig. 13.8.

e) Discontinua en el intervalo $[-1, 0]$ y en el punto $x=3$.

6. Representa la función $f(x)=\begin{cases} -2 & x<-2 \\ 1 & -2\leqslant x<0 \\ -1 & 0\leqslant x\leqslant 3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$

¿Cómo se llaman estas funciones?

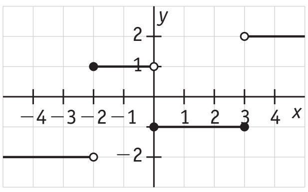


Fig. 13.9.

Se trata de una función escalonada.

7. Representa gráficamente la función que da el coste de un aparcamiento, dependiendo del tiempo aparcado, si el precio por hora o fracción es de 1,20 €.

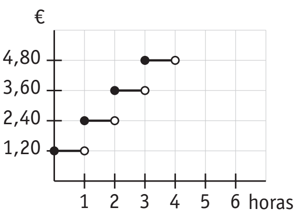


Fig. 13.10.

8. Representa gráficamente:
a) $y=3\cdot \mathrm{ENT}[x]$; **b) $y=\mathrm{ENT}[2x]$;**
c) $y=\mathrm{ENT}[0,5x]$

a)

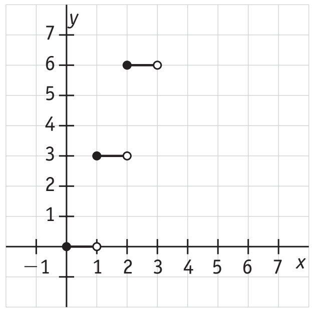


Fig. 13.10.

b)

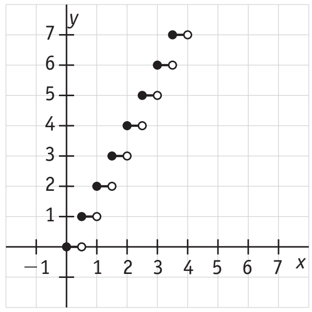


Fig. 13.11.

c)

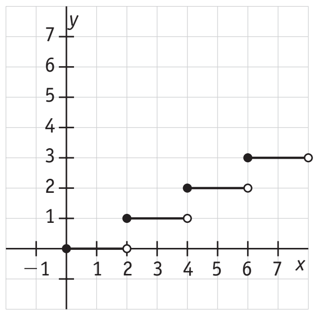


Fig. 13.12.

9. El índice de audiencia (evaluado en una escala de 0 a 10) de cierto programa de televisión de 30 minutos de duración se comporta de acuerdo con la función:
$I(t)=At^2+Bt+C$, $\quad 0\leqslant t\leqslant 30$, $\quad (A\neq 0)$
donde A, B y C son constantes a determinar.
Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar el programa se alcanza el índice de audiencia 10 y que el programa se inicia con un índice de audiencia 6, se pide:
a) Determina las constantes A, B y C. Justifica la respuesta.
b) Representa y comenta la función obtenida.

a) Se trata de una función cuadrática (parabólica).
Se sabe que: $I(20)=10$; $I(0)=6$; y que a los 20 minutos se da la máxima audiencia (luego en $t=20$ tiene el vértice la parábola).
- $I(20)=10 \Rightarrow 400A+20B+C=10$
- $I(0)=6 \Rightarrow C=6$

Como el vértice, que está en $t=20$, es el punto medio de dos puntos con la misma ordenada, para $t=40$, la ordenada volverá a valer 6, luego $I(40)=6$:
Por $I(40)=6 \Rightarrow 1\,600A+40B+C=6$
Así pues:

$$\left.\begin{array}{r}400A+20B+C=10\\ C=6\\ 1\,600A+40B+C=6\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}400A+20B=4\\ 1\,600A+40B=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$A=-\dfrac{1}{100}$, $B=\dfrac{2}{5}$, $C=6$

Por tanto: $I(t)=-0{,}01t^2+0{,}4t+6$.

b) La función es una parábola de eje vertical, con máximo en el punto (20, 10). Su representación gráfica es el trozo continuo de la parábola de la siguiente figura.
Su dominio es el intervalo [0, 30], en minutos.
Su recorrido, el intervalo [6, 10].

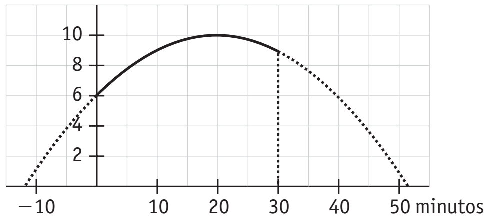


Fig. 13.13.

Tipo II. Composición de funciones. Función inversa

10. Dadas $f(x)=2x-3$ y $g(x)=\dfrac{x}{5}$, halla:

a) $f(g(0))$; b) $f(g(-2))$;
c) $g(f(5))$; d) $g(f(-1))$

a) $g(0)=0\Rightarrow f(0)=-3\Rightarrow f(g(0))=-3$
b) $g(-2)=-2/5\Rightarrow f(-2/5)=-19/5\Rightarrow f(g(-2))=-19/5$
c) $f(5)=7\Rightarrow g(7)=7/5\Rightarrow g(f(5))=7/5$
d) $f(-1)=-5\Rightarrow g(-5)=-1\Rightarrow g(f(-1))=-1$

11. Para las mismas funciones determina $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

$f(g(x))=2g(x)-3=\dfrac{2x}{5}-3=\dfrac{2x-15}{5}$

$g(f(x))=\dfrac{f(x)}{5}=\dfrac{2x-3}{5}$

12. Dadas $f(x)=x-3$ y $g(x)=\dfrac{5}{x+1}$, halla:

a) $f(g(x))$ y $g(f(x))$.
b) $f(g(4))$ y $f(g(1))$. Determina el domino de $f(g(x))$.
c) $g(f(3))$ y $g(f(2))$. Determina el dominio de $g(f(x))$.

a) $f(g(x))=g(x)-3=\dfrac{5}{x+1}-3=\dfrac{2-3x}{x+1}$

$g(f(x))=\dfrac{5}{f(x)+1}=\dfrac{5}{x-3+1}=\dfrac{5}{x-2}$

b) $f(g(4))=\dfrac{2-12}{4+1}=-2$; $f(g(1))=\dfrac{2-3}{1+1}=\dfrac{-1}{2}$.

Dominio $=\mathbf{R}-\{-1\}$

c) $g(f(3))=\dfrac{5}{3-2}=5$; $g(f(2))=\dfrac{5}{2-2}=\infty$: no está definida.

Dominio $=\mathbf{R}-\{2\}$

13. Calcula la función inversa de $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Comprueba que $f(f^{-1}(4))=f(f^{-1}(4))=4$.

Si $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, debe cumplirse que $f(g(x))=x\Rightarrow \sqrt{g(x)^2+1}=x$.

Elevando al cuadrado y despejando, $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x^2-1}$
Efectivamente:

$f(f^{-1}(4))=\sqrt{(\sqrt{4^2-1})^2+1}=\sqrt{15+1}=4$;

y al revés, $f(f^{-1}(4))=\sqrt{(\sqrt{4^2+1})^2-1}=\sqrt{17-1}=4$

14. Halla la inversa de las funciones.

a) $f(x)=x-3$; b) $g(x)=\dfrac{5}{x-1}$;

c) $h(x)=x^2-3$; d) $i(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

a) $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(x)-3=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x+3$

b) $g(g^{-1}(x))=\dfrac{5}{g^{-1}(x)+1}=x\Rightarrow 5=xg^{-1}(x)+x\Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{5-x}{x}$

c) $h(h^{-1}(x))=(h^{-1}(x))^2+3=x\Rightarrow h^{-1}(x)=\sqrt{x+3}$

d) $i(i^{-1}(x))=\dfrac{2i^{-1}(x)}{i^{-1}(x)+1}=x\Rightarrow 2i^{-1}(x)=xi^{-1}(x)+x\Rightarrow$

$\Rightarrow i^{-1}(x)=\dfrac{x}{2-x}$

15. Para las funciones anteriores, halla:
a) $f^{-1}(5)$; b) $g^{-1}(2)$; c) $h^{-1}(1)$; d) $i^{-1}(-3)$

a) $f^{-1}(5)=8$;

b) $g^{-1}(2)=\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{3}{2}$

c) $h^{-1}(1)=\sqrt{1+3}=2$

d) $i^{-1}(3)=\dfrac{-3}{2-(-3)}=\dfrac{-3}{5}$

Tipo III. Gráficas de funciones. Transformaciones gráficas

16. A partir de la gráfica de la función $f(x)=x-2$, representa las siguientes funciones asociadas a ella:
a) $-f(x)$ b) $f(-x)$ c) $|f(x)|$ d) $f(x-4)$;

Damos valores en la siguiente tabla:

X	$f(x)=x-2$	$-f(x)$	$f(-x)$	$\lvert f(x)\rvert$	$f(x-4)$
–1	–3	3	–1	3	–7
0	–2	2	–2	2	–6
1	–1	1	–3	1	–5
2	0	0	–4	0	–4
3	1	–1	–5	1	–3
4	2	–2	–6	2	–2

Sus gráficas se indican a continuación.

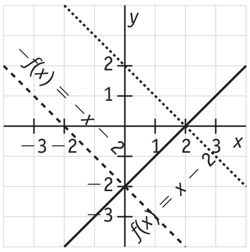


Fig. 13.14.

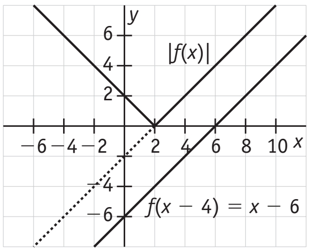


Fig. 13.15.

17. Representa gráficamente la recta $y = x + 1$ y la parábola $y = x^2 - 5x + 4$.
a) Determina analíticamente sus puntos de corte.
b) Da una recta que no corte a la parábola. Justifícalo.

a) Se resuelve el sistema: $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$

b) $y = -3$

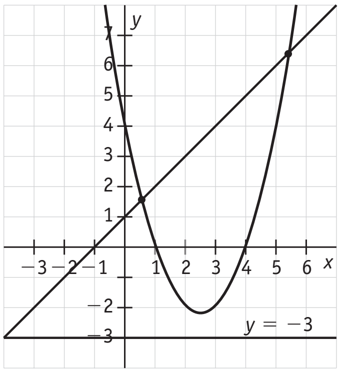


Fig. 13.16.

18. Halla gráficamente los puntos de corte de las gráficas de las funciones $y = x^2 + 2x$ e $y = -x^2 + 4$. Comprueba que las coordenadas de los puntos hallados verifican ambas ecuaciones.

Dando valores se obtienen las gráficas:

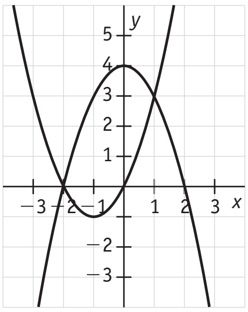


Fig. 13.17.

Se cortan en los puntos (−2, 0) y (1, 3)
La comprobación es inmediata.

19. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases}$

a) Represéntala gráficamente.
b) ¿En qué puntos no es continua?
c) Haz la gráfica de $|f(x)|$.

a) La representación gráfica se da en la figura siguiente.

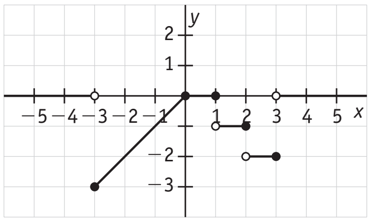


Fig. 13.18.

b) Como puede verse por la figura, la función no es continua en $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$; en los demás puntos es continua.

c) La gráfica de $|f(x)|$

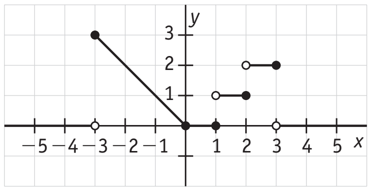


Fig. 13.19.

20. Representa la función $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 0{,}5 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > 0{,}5 \end{cases}$

A partir de su gráfica indica:
a) ¿En qué puntos es discontinua?
b) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?

Su gráfica es la siguiente:

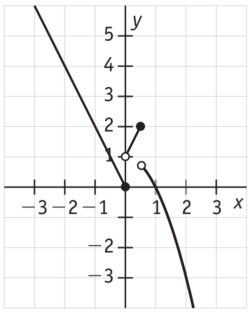


Fig. 13.20.

a) Es discontinua en $x = 0$ y en $x = 0{,}5$.

b) Crece en el intervalo (0, 0,5).
Decrece en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0{,}5, +\infty)$.

21. Dada $f(x) = x^2 + 2x$, halla la expresión de:
a) $f(x) - 2$; **b) $f(x/2)$;**
c) $|f(x)|$; **d) $f(x - 3)$**

a) $f(x) - 2 = x^2 + 2x - 2$

b) $f(x/2) = (x/2)^2 + 2(x/2) = \frac{1}{4}x^2 + x$

c) Como $x^2+2x=x(x+2)=0$ para $x=-2$ y $x=0$, y toma valores negativos para $-2<x<0$, se tiene que

$$|f(x)|=\begin{cases}-x^2-2x, & \text{si } -2<x<0\\ x^2+2x, & \text{si } x\leqslant -2 \text{ o } x\geqslant 0\end{cases}$$

d) $f(x-3)=(x-3)^2+2(x-3)=x^2-4x+3$

22. Representa gráficamente las funciones:
a) $f(x)=2+x$ **b) $f(x)=|2+x|$**
c) $f(x)=2+|x|$
Da la expresión de las dos últimas mediante una función definida a trozos.

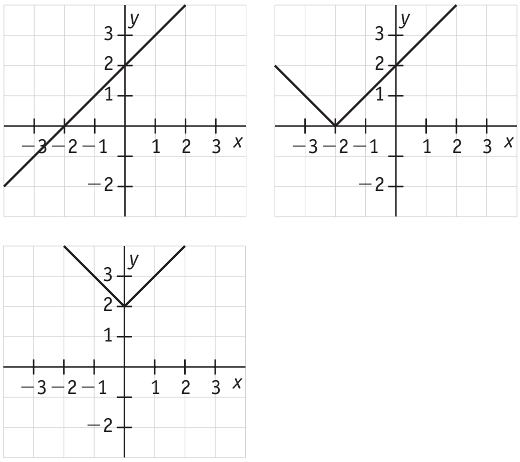


Fig. 13.21.

$$f(x)=|2+x|=\begin{cases}-x-2 & x<-2\\ x+2 & x\geqslant -2\end{cases}$$

$$f(x)=2+|x|=\begin{cases}2-x & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$$

23. Representa gráficamente las funciones:
a) $f(x)=1-x$; **b) $f(x)=|1-x|$;**
c) $f(x)=1-|x|$
Da la expresión de las dos últimas mediante una función definida a trozos.

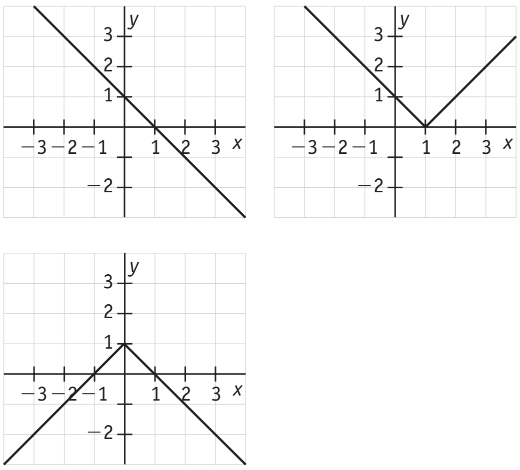


Fig. 13.22.

$$f(x)=|1-x|=\begin{cases}x-1 & x<1\\ 1-x & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$f(x)=1-|x|=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1-x & x\geqslant 0\end{cases}$$

24. Representa gráficamente la función $f(x)=|x^2-3x|$. Da su expresión mediante una función definida a trozos.

X	$f(x)=\|x^2-3x\|$
−1	4
0	0
1	2
2	2
3	0
4	4

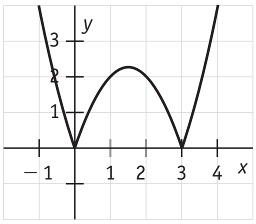


Fig. 13.23.

25. Representa gráficamente las funciones:
a) $f(x)=x|x|$;
b) $f(x)=x|x-3|$;
c) $f(x)=(x-3)|x|$
Da la expresión de cada una de ellas mediante una función definida a trozos.

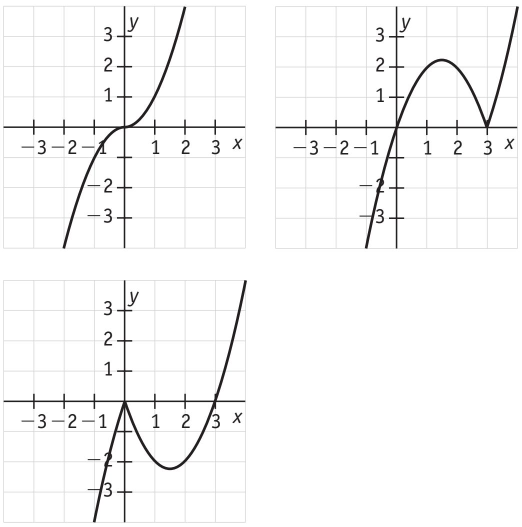


Fig. 13.24.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$f(x)=x|x-3|=\begin{cases}-x^2+3x & x<3\\ x^2-3x & x\geqslant 3\end{cases}$$

$$f(x)=(x-3)|x|=\begin{cases}-x^2+3x & x<0\\ x^2-3x & x\geqslant 0\end{cases}$$

Tipo IV. Aplicaciones de las funciones para resolver problemas

26. Un pequeño supermercado utiliza una furgoneta para llevar a domicilio las compras de sus clientes. El precio de la furgoneta fue de 25 000 €. Se estima, además, que el coste de uso y mantenimiento es de 0,20 € por km. Determina:
a) La función del coste total dependiendo de los kilómetros recorridos.
b) ¿A cuánto habrá salido el kilómetro si la furgoneta resulta inservible cuando ha recorrido 350 000 km?

a) Si x son los km recorridos, la función de coste será $f(x)=25\,000+0{,}20x$

b) Tras recorrer 350 000 km los costes han sido de $f(350\,000)=25\,000+0{,}20\cdot 350\,000 = 95000$ €.

Siendo el coste por km de $\dfrac{95\,000}{350\,000}=0{,}27$ €.

27. Expresa la superficie de un rectángulo de perímetro 100 m en función de su base x. Representa gráficamente la función obtenida. Utilízala para hallar las dimensiones del rectángulo de máxima superficie.

$P = 2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x$
$S = x(50 - x) \Rightarrow S(x) = -x^2+50x$
Es la parábola siguiente:

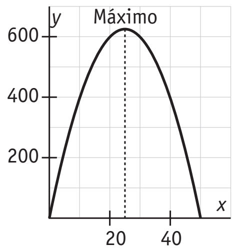


Fig. 13.25.

El máximo se da en el vértice, para $x = 25$.

28. Halla, en función de su base x, la superficie de un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 cm. A partir de esa fórmula, determina la superficie del que tiene base 2 y 3.

Si el triángulo es

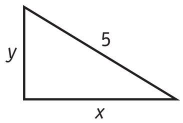


Fig. 13.26.

su superficie será: $S=\dfrac{xy}{2}$.

Por Pitágoras: $x^2+y^2=25 \Rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$

Sustituyendo, se obtiene la función $S(x)=\dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$

Para $x = 2$, $S(2)=\dfrac{2\sqrt{25-2^2}}{2}=\sqrt{21}$

Para $x = 3$, $S(3)=\dfrac{3\sqrt{25-9}}{2}=6$

29. Halla, en función de su lado x, la función que da la superficie de un triángulo equilátero.

Sea el triángulo de la figura.

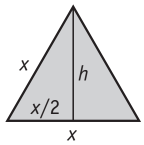


Fig. 13.27.

Su superficie vale: $S=\dfrac{xh}{2}$.

Por Pitágoras: $h=\sqrt{x^2-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

Por tanto: $S(x)=\dfrac{x\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

30. Considera la curva $y=12-x^2$. Si P es un punto de esa curva, situado en el primer cuadrante, determina la expresión de la función que da el área del rectángulo determinado por los dos ejes y las rectas paralelas a los ejes que pasan por P.

Un punto P, genérico, de la curva $y=12-x^2$, es $P = (x, y) = (x,\ 12 - x^2)$
El rectángulo que se determina con los ejes es el sombreado en la figura adjunta.
Su superficie es: $S = xy = x(12 - x^2) = 12x - x^3$

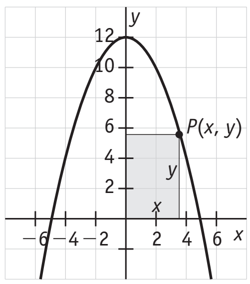


Fig. 13.28.

31. El coste de instalación de una empresa es de 50 000 €. La producción de cada unidad le supone un coste adicional de 20 €. Halla:
a) El coste de fabricación de 100, de 1 000, de x unidades
b) El coste por unidad en cada uno de los supuestos anteriores.
c) ¿A qué tiende el costo unitario cuando se fabrican muchas unidades de producto?

a) Costes de fabricación:
De 100 unidades:
$50\,000 + 20 \cdot 100 = 52\,000$ €
De 1000 unidades:
$50\,000 + 20 \cdot 1\,000 = 70\,000$ €
De x unidades:
$C(x) = 50\,000 + 20x$

b) El coste por unidad se obtiene dividiendo el coste total de fabricación entre el número de unidades.

Para 100 unidades: $\dfrac{52\,000}{100} = 520$ €

Para 1 000 unidades: $\dfrac{70\,000}{1\,000} = 70$ €

Para x unidades: $\dfrac{50\,000 + 20x}{x} = \dfrac{50\,000}{x} + 20$ €

c) Veamos que ocurre al aumentar la producción:
10 000 unidades $\Rightarrow$ coste unitario: $5 + 20 = 25$ €.
100 000 unidades $\Rightarrow$ coste unitario: $0,5 + 20 = 20,5$ €.
1 000 000 unidades $\Rightarrow$ coste unitario: $0,05 + 20 = 20,05$ €
El coste unitario tiende a 20 €. Es decir, la recta $y = 20$ es una asíntota de la función de coste unitario.

Observa que el coste unitario, $c(x) = \dfrac{50\,000}{x} + 20$, disminuye cuando el denominador x aumenta, acercándose cada vez más a 20.
En consecuencia, la representación gráfica de $c(x)$ es:

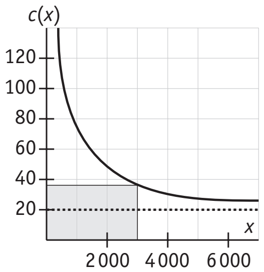


Fig. 13.29.

En la figura , la ordenada de la curva indica el coste unitario, mientras que el área del rectángulo coloreado expresa el coste de fabricación para x unidades. (En la figura se ha concretado para x = 3 000).

32. El fabricante anterior vende cada unidad producida a 50 €. Halla cuántas unidades debe producir y vender para:
a) Igualar gastos.
b) Ganar 10000 €.

a) El coste de fabricación por unidad debería ser de 50 €.
Es decir,

$$\frac{50\,000}{x} + 20 = 50 \Rightarrow 50000 + 20x = 50x \Rightarrow 30x = 50000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50\,000}{30} = 1\,666,7 \text{ unidades.}$$

b) La función que indica los costes de producción de x unidades es $C(x) = 50\,000 + 20x$, mientras que los ingresos por x unidades vendidas serán $I(x) = 50x$
Para ganar 10 000 €,
$I(x) = C(x) + 10\,000 \Rightarrow 50x = 50\,000 + 20x + 10\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 30x = 60\,000 \Rightarrow x = 2\,000$
Habría que producir y vender 2 000 unidades.

33. La relación entre la temperatura del aire *T* (en °F) y la altitud *h* (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leqslant h \leqslant 20000$. Si la temperatura a nivel del mar es de 60° F y por cada 5 000 m de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 18° F, se pide:
a) Expresa *T* en función de *h*.
b) Calcula de forma razonada la temperatura del aire a una altitud de 15 000 m.
c) Calcula de forma razonada la altitud a la que la temperatura es 0° F.

a) La función será de la forma: $T(h) = ah + b$
Al nivel del mar $h = 0$ y $T = 60 \Rightarrow T(0) = 0 + b = 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 60$
A 5 000 m, $T = 60 - 18 = 42 \Rightarrow 5\,000a + b = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,000a + 60 = 42 \Rightarrow a = -\dfrac{18}{5\,000}$

Por tanto, la función buscada es: $T(h) = -\dfrac{18}{5\,000}h + 60$

b) Para $h = 15\,000 \Rightarrow T(15\,000) = -\dfrac{18}{5\,000} \cdot 15\,000 + 60 = 6°$ F

c) Si $T(h) = 0°$ F $\Rightarrow 0 = -\dfrac{18}{5\,000} \cdot h + 60 \Rightarrow h = 16666,7$ m

34. La factura bimensual de una compañía telefónica consta de una cantidad fija (las cuotas de abono) por un importe de 30,60 €, más el consumo, con un precio por minuto de 0,12 € .
a) ¿Cuánto debe pagar una familia que consumió en dos meses 215 minutos?
b) Halla la expresión que dé el importe total de la factura en función de los minutos consumidos.
c) Si a esa suma hay que cargarle el 16 % de IVA, ¿cuál es la función que da el importe total (IVA incluido) de la factura dependiendo de los minutos consumidos.

a) $30,60 + 215 \cdot 0,12 = 56,4$
b) $f(x) = 30,60 + 0,12x$
c) La factura total $F(x)$ ascenderá a
$F(x) = 1,16f(x) = 35,496 + 0,1392x$

35. Una agencia de viajes organiza un crucero por el Mediterráneo. El precio del viaje es de 1 000 euros si reúne entre 30 y 60 pasajeros; para menor número, el crucero se suspende. Pero, si supera los 60, hace una rebaja de 10 € a cada participante por cada nuevo pasajero.
a) Halla la función que da el precio del crucero dependiendo del número de viajeros. Represéntala gráficamente.
b) Calcula la función que da el ingreso total que obtiene la agencia organizadora en función del número de viajeros. Represéntala gráficamente.
c) Critica los resultados hallados.

a) Sean: x = número de participantes y $p(x)$ = precio del crucero.
- El precio es de 100 000 si $30 \leqslant x \leqslant 60$.
- A partir de 60, por cada nuevo participante, descuentan 10 €; es decir, el descuento es de $10 \cdot (x - 60)$ si $x > 60$.

Entonces,
si $x > 60$, $p(x) = 1\,000 - 10(x - 60) = 1\,600 - 10x$.
(Observa que: si $x = 61$, $p(61) = 990$ €; si $x = 65$, $p(65) = 950$ €).

En definitiva, $p(x) = \begin{cases} 1\,000, & \text{si } 30 \leqslant x \leqslant 60 \\ 1\,600 - 10x & \text{si } x > 60 \end{cases}$

Su gráfica es la siguiente:

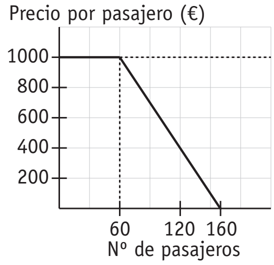


Fig. 13.30.

b) El ingreso total, $I(x)$, se obtiene multiplicando el precio del crucero por el número de viajeros. Esto es, $I(x) = x \cdot p(x)$;

luego $l(x) = \begin{cases} 1\,000x, & \text{si } 30 \leqslant x \leqslant 60 \\ 1\,600x - 10x^2 & \text{si } x > 60 \end{cases}$

Su representación gráfica viene dada en la figura:

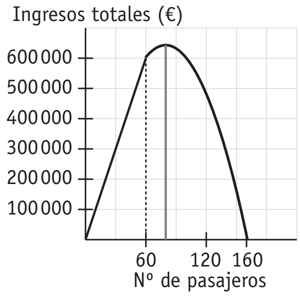


Fig. 13.31.

c) Parece obvio que la agencia de viajes debería haber fijado un tope para las rebajas, ya que, de lo contrario, si el número de participantes aumentase mucho, el viaje se abarataría demasiado, pudiéndoles salir gratis (o incluso *negativo*). En la figura anterior se observa cómo los ingresos disminuyen a partir de $x = 80$, que es el vértice de la parábola.

36. Los ingresos y los costes, en euros, de una empresa vienen dados por las funciones $l(x) = 50\,000x - 4\,000x^2$ y $C(x) = 100\,000 + 5\,000x$, donde x son miles unidades producidas y vendidas; esto es, $x = 1$, significa 1 000 unidades. Halla:

a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.

b) La función que da el beneficio y la región donde ese beneficio es positivo.

a) El equilibrio se da cuando $I(x) = C(x)$:
$50\,000x - 4\,000x^2 = 100\,000x + 5\,000x \Rightarrow 4x^2 - 45x + 100 = 0$
Las soluciones de esta ecuación son, aproximadamente, $x = 3{,}05$ y $x = 8{,}2$. O sea, la empresa ni gana ni pierde cuando produce y vende 3 050 unidades u 8 200 unidades.

b) La función que da el beneficio vendrá dada por la diferencia entre ingresos y costes. Esto es:
$B(x) = I(x) - C(x) \Rightarrow B(x) = -4\,000x^2 + 45\,000x - 100\,000$
Esta función es una parábola. Todos los puntos de $B(x)$ por encima del eje OX corresponden a beneficios positivos. Como corta a dicho eje en $x = 3{,}05$ y $x = 8{,}2$, una producción entre esos valores (de 3 050 a 8 200 unidades) da beneficios positivos.

Gráficamente, se observa este resultado en la Fig. 7.32.

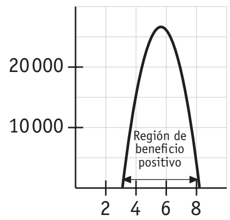


Fig. 13.32.

37. Se desea cercar con cuerda dos parcelas rectangulares adyacentes (consecutivas) e iguales que encierren entre las dos un área de 1.000 m².

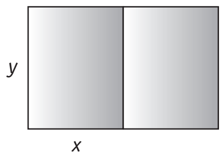


Fig. 13.33.

a) Si x indica el ancho de las parcelas, encuentra la función que da la longitud $L(x)$ de cuerda necesaria para cercarlas.

b) Representa $L(x)$, y a partir de esa gráfica determina, aproximadamente, el mínimo necesario de cuerda para cercar las dos parcelas. (Puede convenirte hacer una ampliación de la gráfica desde $x = 15$ hasta $x = 25$).

a) Área total $= 1\,000 = 2xy$
Longitud de la cuerda necesaria: $L(x) = 4x + 3y$
$1\,000 = 2xy \Rightarrow y = \dfrac{500}{a}$
Por tanto, $L(x) = 4x + 3\left(\dfrac{500}{x}\right) = 4x + \dfrac{1\,500}{x}$

b)

x	$L(x)$
1	1 504
5	320
15	160
20	155
25	160
50	230

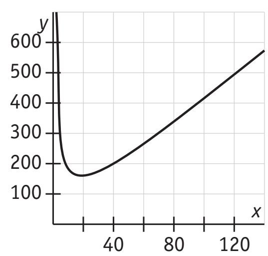


Fig. 13.34.

Se puede observar en la gráfica que el mínimo de L(x) se da cuando está próximo a 19, siendo necesarios unos 150 m de cuerda. No hay máximo.

Nota: Resulta evidente que la solución de este problema requiere el auxilio del **cálculo diferencial**, herramienta que todavía no conocen los alumnos. La solución mínima exacta se da en $x = \sqrt{375} \cong 19,4$

Nuestro objetivo –que sepan leer una gráfica– se cumple sobradamente; de cualquier manera, no estaría de más sugerir la necesidad de una herramienta más potente (el cálculo diferencial) para resolver este tipo de problemas.

38. Se quiere construir una caja partiendo de un trozo de cartulina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadradito en cada esquina y doblando.
a) Determina la función que da el volumen de la caja dependiendo del lado del cuadrado cortado.
b) ¿Qué volumen tendrá la caja cuando cortamos 0, 5, 10 cm?
c) Haz una tabla de valores y representa la función. A partir de su gráfica determina su dominio, recorrido y máximo.

Cortamos un cuadrado de x cm de lado.
a) $V(x) = (32 - 2x) \cdot (24 - 2x) \cdot x$
b) $V(0) = 0$; $V(5) = 1\,540$; $V(10) = 480$
c)

x	0	2	4	5	6	8	10	12
$V(x)$	0	1 120	1 536	1 540	1 440	1 024	480	0

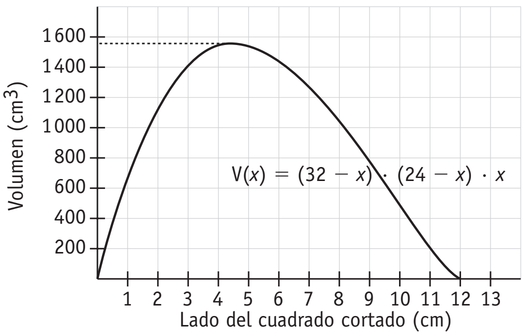


Fig. 13.35.

Dominio: [0, 12];
Imagen: ≅[0, 1 550];
Máximo: ≅1 550

39. Un tratamiento médico para pacientes con problemas respiratorios consiste en la administración de oxígeno. El oxígeno se presenta en ampollas a presión, con un volumen de 15 cc cada una. Sabiendo que para cualquier temperatura, la presión por el volumen es constante, $PV = k$, se pide:
a) ¿Cuál es la presión del oxígeno en la ampolla a 20 °C si a esa temperatura la constante k para el oxígeno vale 600?
b) Representa gráficamente la función $V = 600/P$.

a) Se cumple que $PV = 600 \Rightarrow 15P = 600 \Rightarrow P = 40$
b) Dando valores

P	10	20	30	40	50
V	60	30	20	15	12

Se obtiene la gráfica:

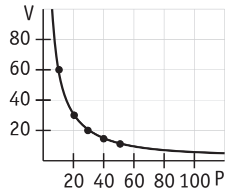


Fig. 13.36.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. ¿Define $f(x) = 17 - 5x$ una función? ¿Qué valor le asocia a $x = 6$?

Si, pues la operación que se indica tiene resultados únicos para cada valor de x. $f(6) = -13$.

2. Indica, justificándolo, si la siguiente tabla determina una función.

x	1	3	5	6	−1	3
y	2	4	4	1	0	2

No, pues a 3 le asocia dos valores.

3. Da el dominio y el recorrido de la función

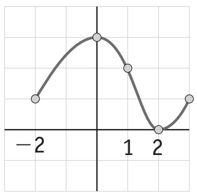


Fig. 13.37.

Dominio = [−2, 3). Recorrido = [0, 3]

4. Para la función anterior, di cuánto vale halla $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$.

$f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3)$ no está definido.

5. Dibuja una función periódica de periodo 5 a partir d la anterior. ¿Cuánto valdrían $f(5)$ y $f(7)$?

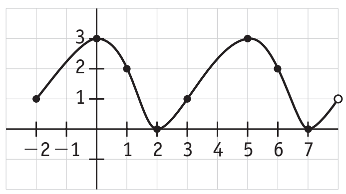


Fig. 13.38.

$f(5) = 3$; $f(7) = 0$

6. **Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<3 \\ 0{,}5x-2 & x\geqslant 0 \end{cases}$, halla $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$. Represéntala gráficamente. ¿Es continua en $x=0$?**

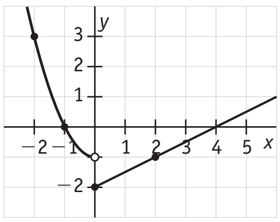


Fig. 13.39.

No es continua en $x=0$.

7. **Calcula m para que los tres pares de números pertenezcan a la misma función lineal.**

x	1	3	5
y	0,8	m	2,9

$m=(0{,}8+2{,}9)/2=1{,}85$

8. **Dadas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, halla $f(g(2))$ y $g(f(-1))$.**

$f(g(2))=f(1/3)=1/9$; $g(f(-1))=g(1)=1/2$.

9. **Una parcela rectangular tiene 100 m de perímetro.**

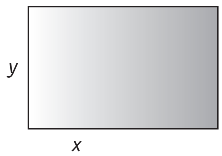


Fig. 13.40.

¿Cuánto vale su área si $x=10$?; ¿y si $x=15$?
¿Qué expresión da su área dependiendo del valor de x?

- Si $x=10$, $y=40 \Rightarrow S=10\cdot 40=400$
- Si $x=15$, $y=35 \Rightarrow S=525$
- $x+y=50 \Rightarrow y=50-x \Rightarrow S=xy=x(50-x)$

10. **¿Cuánto vale la diagonal de ese rectángulo si $x=10$? ¿Qué expresión da la longitud de la diagonal, dependiendo del valor de x?**

- Si $x=10$, $y=40 \Rightarrow d=\sqrt{10^2+40^2}=10\sqrt{17}$
- $x+y=50 \Rightarrow y=50-x \Rightarrow d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(50-x)^2}$

Actividades

1. Representa, con ayuda de la calculadora, las funciones $f(x)=1{,}8^x$ y $h(x)=0{,}3^x$.

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)=1{,}8^x$	1	1,8	3,24	5,83	0,56	0,31	0,17
$h(x)=0{,}3^x$	1	0,3	0,09	0,027	3,33	11,11	37,04

Gráficas:

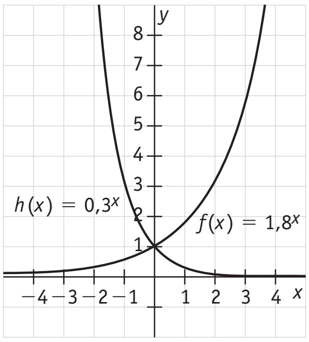


Fig. 14.1.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $12^5=x^2$ **b)** $x^6=64$
c) $3^{2x}=531\,441$ **d)** $\log_5 200=x$
e) $\log_x 1\,024=10$ **f)** $\log_2 3x=5$

a) $12^2=x^2 \Leftrightarrow 12^{5/2}=x$.
Con la calculadora: 12 $\boxed{x^y}$ 2,5 $\boxed{=}$ 498,8306

b) $\log x^6=\log 64 \Rightarrow 6\log x=1{,}806179974 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x=0{,}3010299957 \Rightarrow x=\text{antlog }0{,}3010299957 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=2$
En este caso, es conveniente observar que $64=2^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^6=2^6 \Rightarrow x=2$

c) Aplicando logaritmos: $\log(3^{2x})=\log 531\,441 \Rightarrow$
$$\Rightarrow 2x\log 3=\log 531441 \Rightarrow x=\frac{\log 531\,441}{2\log 3}=6.$$
(Podríamos observar que $531\,441=3^{12}$).

d) $\log_5 200=x \Rightarrow 5x=200 \Rightarrow \log 5^x=\log 200 \Rightarrow$
$$\Rightarrow x\log 5=\log 200 \Rightarrow x=\frac{\log 200}{\log 5}=3{,}2920.$$

e) $\log_x 1\,024=10 \Rightarrow x^{10}=1\,024 \Rightarrow x=\sqrt[10]{1\,024}=2$

f) $\log_2 3x=5 \Rightarrow 3x=2^5 \Rightarrow 3x=32 \Rightarrow x=32/3$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

a) $4^x+2^{x+3}-20=0$;
b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88$;
c) $x^2e^x-2xe^x=0$

a) $4^x+2^{x+3}-20=0 \Rightarrow 2^{2x}+8\cdot 2^x-20=0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow 2^x=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\frac{-8\pm 12}{2}=2 \Rightarrow x=1$$
(La solución -10 no vale.)

b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88 \Rightarrow 2^x+2\cdot 2^x+8\cdot 2^x=88 \Rightarrow 11\cdot 2^x=88 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3$

c) $x^2e^x-2xe^x=0 \Rightarrow xe^x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$

4. Calcula el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $3\log x-5\log 2=\log\dfrac{x}{2}$
b) $\log(x+1)-\log(x-3)=5$

a) $3\log x-5\log 2=\log\dfrac{x}{2} \Rightarrow \log x^3-\log 2^5=\log\dfrac{x}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log\dfrac{x^3}{2^5}=\log\dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{x^3}{2^5}=\dfrac{x}{2} \Rightarrow x^3-16x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x^2-16)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-4,\ x=4.$
La única que vale es $x=4$.

b) $\log\dfrac{x+1}{x-3}=5 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-3}=100\,000 \Rightarrow x=\dfrac{300\,001}{99\,999}$

5. Dibuja a partir de la función $f(x)=\cos x$, las gráficas de las funciones:

a) $f(x)=\cos x-1$
b) $f(x)=\cos(x-2)$
c) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$

a) Se traslada una unidad hacia abajo.

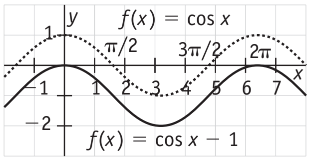


Fig. 14.2.

b) Se traslada 2 unidades hacia la derecha.

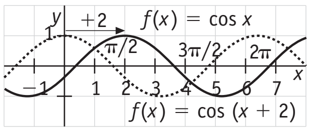


Fig. 14.3.

c) Su periodo es $p=4\pi$.

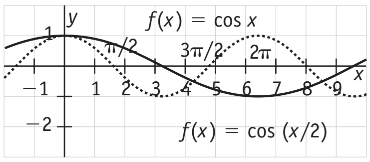


Fig. 14.4.

6. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $1-2\text{sen } x=3$
b) $\cos 2x=1/2$

Representa gráficamente las funciones $f(x)=2\text{sen}x$ y $g(x)=\cos 2x$ y da una interpretación gráfica de las soluciones halladas.

a) $1-2\text{sen } x=3 \Rightarrow \text{sen } x=-1 \Rightarrow x=\text{arcsen }(-1) \Rightarrow$
$$\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

b) $\cos 2x = 1/2 \;\Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $2x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$

Gráficamente:

a)

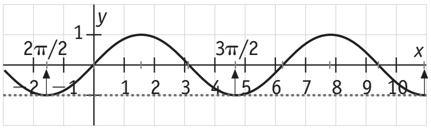


Fig. 14.5.

b)

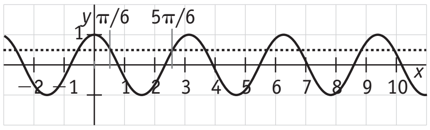


Fig. 14.6.

Problemas propuestos

Tipo I. Las funciones exponencial y logarítmica

1. Calcula, aplicando la definición de logaritmo, el valor de:
a) $\log_9 81$ b) $\log_2 \sqrt{128}$
c) $\log_4 \dfrac{1}{16}$ d) $\log_5 \sqrt[4]{125}$

a) $\log_9 81 = x \Rightarrow 9^x = 81 \Rightarrow x = 2$

b) $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow 2^x = 2^{7/2} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

c) $\log_4 \dfrac{1}{16} = x \Rightarrow 4^x = \dfrac{1}{16} \Rightarrow 4^x = 4^{-2} \Rightarrow x = -2$

d) $\log_5 \sqrt[4]{125} = x \Rightarrow 5^x = \sqrt[4]{125} \Rightarrow 5^x = 5^{3/4} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

2. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, halla (sin calculadora) el valor de:
a) $\log 20$ b) $\log 200$ c) $\log 0{,}0002$

a) $\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0{,}3010 + 1 = 1{,}3010$
b) $\log 200 = \log(2 \cdot 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = 0{,}3010 + 2 =$
$= 2{,}3010$
c) $\log 0{,}0002 = \log(2 \cdot 10^{-4}) = \log 2 + \log 10^{-4} =$
$= 0{,}3010 - 4 = -3{,}699$

3. Sabiendo que $\log 3 = 0{,}4771$, halla (sin calculadora) el valor de:
a) $\log 0{,}3$; b) $\log 30\,000$; c) $\log(1/9)$;

a) $\log 0{,}3 = \log(3 \cdot 10^{-1}) = \log 3 + \log 10^{-1} =$
$= 0{,}4771 - 1 = -0{,}5229$
b) $\log 30\,000 = \log(3 \cdot 10^4) = \log 3 + \log 10^4 =$
$= 0{,}4771 + 4 = 4{,}4771$
c) $\log(1/9) = \log 3^{-2} = -2\log 3 = -2 \cdot 0{,}4771 = -0{,}9542$

4. A partir de los valores de logaritmo de 2 y de 3, halla:
a) $\log 6$ b) $\log 75$ c) $\log(0{,}36)$

a) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$

b) $\log 75 = \log(3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2\log 5 =$
$= 0{,}4771 + 2\log(10/2) =$
$= 0{,}4771 + 2(\log 10 - \log 2) =$
$= 0{,}4771 + 2(1 - 0{,}3010) = 1{,}8751$
c) $\log 0{,}36 = \log(36/100) = \log 6^2 - \log 10^2 = 2\log 6 - 2 =$
$2 \cdot 0{,}7781 - 2 = -0{,}4438$

5. Utilizando la fórmula del cambio de base, halla:
a) $\log_2 100$
b) $\log_5 500$
c) $\log_8 320000$

a) $\log_2 100 = \dfrac{\log 100}{\log 2} \cong 6{,}6439$

b) $\log_5 500 = \dfrac{\log 500}{\log 5} \cong 3{,}8614$

c) $\log_8 320\,000 = \dfrac{\log 320\,000}{\log 5} \cong 6{,}0959$

6. Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente las funciones.
a) $f(x) = 1{,}1^x$
b) $y = (0{,}8)^x$

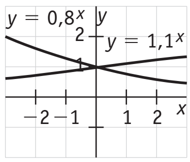


Fig. 14.7.

7. Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente la función exponencial $f(x) = e^{2x-1}$.

Tabla de valores:

x	$f(x) = e^{2x-1}$
–2	$e^{-5} = 0{,}0067\ldots$
–1	$e^{-3} = 0{,}0497\ldots$
0	$e^{-1} = 0{,}3678\ldots$
1	$e = 2{,}7182\ldots$
2	$e^3 = 20{,}0855\ldots$
1/2	$e^0 = 1$

Se obtiene la gráfica

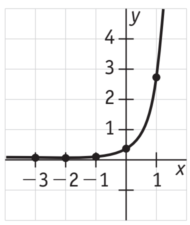


Fig. 14.8.

8. Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente la función logarítmica $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

Tabla de valores:

x	$f(x) = \log(x^2+1)$
-3	$\log 10 = 1$
-2	$\log 5 = 0{,}6990$
-1	$\log 2 = 0{,}3010$
0	$\log 1 = 0$
1	$\log 2 = 0{,}3010$
2	$\log 5 = 0{,}6990$
3	$\log 10 = 1$

Se obtiene la figura

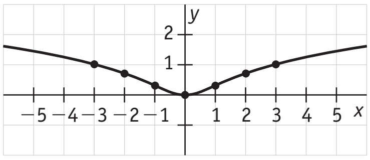


Fig. 14.9.

9. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:
a) $f(x)=10^{x-2}$;
b) $f(x)=10^{1/(x-2)}$;
c) $f(x)=10^{\sqrt{x-2}}$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}$
b) $\text{Dom } g(x) = \mathbf{R} - \{2\}$
c) $\text{Dom } h(x) = [2, \infty)$

10. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:
a) $y=\log(x+3)$
b) $y=\log(x^2+3)$
c) $y=\dfrac{1}{\log(x+3)}$

a) $\text{Dom } f(x) = (-3, \infty)$
b) $\text{Dom } g(x) = \mathbf{R}$
c) $h(x)$ está definida siempre que $x+3>0$, es decir, para $x>-3$.
Además se tiene que cumplir que $\log(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -2$
Por tanto, $\text{Dom } h(x) = (-3, \infty) - \{-2\}$

11. Sea la función $f(x)=\log(-x^2+x+2)$. Indica su dominio de definición y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

La función está definida cuando $-x^2+x+2>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1<x<2$.
Por tanto, $\text{Dom } f(x) =$ intervalo $(-1, 2)$.
Corte con el eje *OY*. Si $x=0 \Rightarrow f(0)=\log 2 = 0{,}3010$.
Punto $(0; 0{,}3010)$.
Corte con el eje *OX*. Si $f(x)=0 \Rightarrow \log(-x^2+x+2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x^2+x+2=1 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Puntos: $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Tipo II. Ecuaciones y sistemas (exponenciales y logarítmicos)

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $x=15{,}2^{1{,}1}$ **b) $x=1{,}001^{100}$**
c) $0{,}5=5^{2x}$ **d) $3=x^{2{,}5}$**
f) $5^{2x}=625$ **e) $5^{3x+2}=15\,625$**

a) $x = 15{,}2^{1{,}1} = 19{,}954$
b) $x = 1{,}001^{100} = 1{,}105$
c) $0{,}5 = 5^{2x} \Rightarrow \log 0{,}5 = 2x \cdot \log 5 \Rightarrow x = -0{,}215$
d) $3 = x^{2{,}5} \Rightarrow x = \sqrt[2{,}5]{3} = 1{,}552$
e) $5^{2x} = 625 \Rightarrow 5^{2x} = 5^4 \Rightarrow x = 2$
f) $5^{3x+2} = 15\,625 \Rightarrow \log 5^{3x+2} = \log 15\,625 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3x+2)\log 5 = \log 15\,625 \Rightarrow 3x+2 = \dfrac{\log 15\,625}{\log 5} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4/3$.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $4^{1-3x}=2^{x-2}$ **b) $3^x-3^{-x}=\dfrac{80}{9}$**
c) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}=21$ **d) $9^x-8\cdot3^{x+1}-81=0$**
e) $4^x-50\cdot2^x=9\,984$ **f) $25^x-100\cdot5^x=3\,125$**

a) $4^{1-3x}=2^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^{1-3x}=2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2-6x}=2^{x-2}$
Como las bases son iguales, también deben serlo sus exponentes:
$2-6x=x-2 \Rightarrow 7x=4 \Rightarrow x=4/7$
b) $3^x-3^{-x}=\dfrac{80}{9} \Rightarrow 3^{2x}-1=\dfrac{80\cdot3^x}{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9\cdot3^{2x}-80\cdot3^x-9=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^x=\dfrac{80\pm\sqrt{6\,400+81\cdot4}}{18}=\dfrac{80\pm82}{18}=\begin{cases}1/9\\9\end{cases} \Rightarrow$
Si $3^x=\dfrac{1}{9} \Rightarrow x=-2$.
Si $3^x=9 \Rightarrow x=2$.
c) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}=21 \Rightarrow 3^x-\dfrac{3^x}{3}+\dfrac{3^x}{3^2}=21 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9\cdot3^x-3\cdot3^x+3^x=189 \Rightarrow 7\cdot3^x=189 \Rightarrow 3^x=27 \Rightarrow x=3$
d) $9^x-8\cdot3^{x+1}-81=0 \Rightarrow (3^x)^2-24\cdot3^x-81=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3^x=t),\ t^2-24t-81=0 \Rightarrow t=27$ y $t=-2 \Rightarrow 3^x=27 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=3$.
e) $4^x-50\cdot2^x=9\,984 \Leftrightarrow 2^{2x}-50\cdot2^x=9\,984 \Leftrightarrow$
$2^{2x}-50\cdot2^x-9\,984=0$
Haciendo $2^x=t$, se tiene: $t^2-50t-9\,984=0$, cuyas soluciones son $t=128$ y $t=-78$.
Si $t=128 \Rightarrow 2^x=128 \Rightarrow x=7$ (basta observar que $128=2^7$)
Si $t=-78 \Rightarrow 2^x=-78$, que no puede ser.
f) $25^x-100\cdot5^x=3\,125 \Rightarrow 5^{2x}-100\cdot5^x-3\,125=0$.
Haciendo $t=5^x$ se tiene que $t^2-100t-3\,125=0$, cuyas soluciones son: $t=125$ y $t=-25$.
Si $t=125 \Rightarrow 5^x=125=5^3 \Rightarrow x=3$
Si $t=-25 \Rightarrow 5^x=-25$, que no puede ser.

14. Resuelve:
a) $e^{2x-2}=1$ **b) $e^{-10x}=4$**
c) $(x^2-2x+1)e^x=0$ **d) $1+2e^x=2$**

a) $e^{2x-2}=1 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$

b) $e^{-10x}=4 \Rightarrow \ln(e^{-10x})=\ln 4 \Rightarrow -10x \ln e=\ln 4 \Rightarrow$
$x=\dfrac{1{,}38629}{-10}=-0{,}138629$

c) $(x^2-2x+1)e^x=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$.

d) $1+2e^x=2 \Rightarrow 2e^x=1 \Rightarrow e^x=1/2 \Rightarrow \ln(e^x)=\ln(0{,}5) \Rightarrow$
$x\ln e=\ln 05 \Rightarrow x=-0{,}6931$.

15. Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log_6 x=3$ **b) $\log_5 x=2{,}5$**
c) $\log_7 3x=-0{,}2$ **d) $\log x=-4$**
e) $\ln x=3{,}2$ **f) $\log_{16} 4=x$**

a) $x=6^3=216$
b) $x=5^{2,5}=55{,}9$
c) $3x=7^{-0,2} \Rightarrow x=0{,}226$
d) $x=10^{-4}=0{,}0001$
e) $x=e^{3,2}=24{,}53$
f) $16^x=4 \Rightarrow 2^{4x}=2^2 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=1/2$

16. Resuelve las ecuaciones:

a) $\log_6 140=x$
b) $\log_x 100=-2$
c) $\log_2 8x=7$
d) $4\log_2(8x+1)=16$

a) $\log_6 140=x \Leftrightarrow 140=6^x \Rightarrow \log 140=x\log 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\dfrac{\log 140}{\log 6}=2{,}7580$
(Nótese que ésta es la fórmula del cambio de base.)

b) $\log_x 100=-2 \Leftrightarrow 100=x^{-2} \Rightarrow 100=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=\dfrac{1}{100} \Rightarrow x=\dfrac{1}{10}$

c) $\log_2 8x=7 \Rightarrow 8x=2^7=128 \Rightarrow x=16$.

d) $4\log_2(2x+1)=16 \Rightarrow \log_2(2x+1)=4 \Rightarrow 2x+1=2^4 \Rightarrow$
$x=15/2$

17. Resuelve las ecuaciones:

a) $3+\log(x+1\,000)=7$
b) $\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1$
c) $\log(2x+2)-\log(x-3)=1$
d) $\log(3^{2x-2}+7)=2\log(3^{x-1}+1)$

a) $3+\log(x+1\,000)=7 \Rightarrow \log(x+1\,000)=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x+1\,000=10\,000 \Rightarrow x=9\,000$

b) $\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(x+6)-\log(x-3)^2=\log 10 \Rightarrow \log\dfrac{x+6}{(x-3)^2}=\log 10$
$\Rightarrow \dfrac{x+6}{(x-3)^2}=10$.
Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $x=4$ y $x=2{,}1$. Sólo vale $x=4$, pues si $x=2{,}1$ la ecuación no podría escribirse.

c) $\log(2x+2)-\log(x-3)=1 \Rightarrow \log\dfrac{2x+2}{x-3}=1 \Rightarrow \dfrac{2x+2}{x-3}=10$
$\Rightarrow 2x+2=10x-30 \Rightarrow 8x=32 \Rightarrow x=4$.

d) $\log(3^{2x-2}+7)=2\log(3^{x-1}+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(3^{2x-2}+7)=\log(3^{x-1}+1)^2 \Rightarrow 3^{2x-2}+7=(3^{x-1}+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2x-2}+7=3^{2x-2}+2\cdot 3^{x-1}+1 \Rightarrow 6=2\cdot 3^{x-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$.

18. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x^2+2\log y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log x^3-\log y^2=\log 24 \\ \log x-\log y=\log 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x^2+2\log y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ 2\log x+2\log y=2 \end{cases}$
Restando $(E1-E2)$: $-5\log y=5 \Rightarrow \log y=-1 \Rightarrow y=1/10$
Sustituyendo en $E1$: $2\log x+3=7 \Rightarrow 2\log x=4 \Rightarrow$
$\log x=2 \Rightarrow x=100$

b) $\begin{cases} \log x^3-\log y^2=\log 24 \\ \log x-\log y=\log 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log x-2\log y=\log 24 \\ \log x-\log y=\log 5 \end{cases}$
Operando $(E1-3E2)$: $\log y=\log 24-3\log 5 \Rightarrow \log y=\log\dfrac{24}{5^3}$
$\Rightarrow y=\dfrac{24}{125}$
Sustituyendo en $E2$: $\log x=\log 5+\log y \Rightarrow$
$\log x=\log\left(5\cdot\dfrac{24}{125}\right) \Rightarrow x=\dfrac{24}{25}$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \log x+\log y^3=5 \\ \log x^2-\log y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log 125^x-\log 25^y=2\log 5 \\ \log 4^x-\log 64^y=\log 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log x+\log y^3=5 \\ \log x^2-\log y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ 2\log x-\log y=3 \end{cases} \Rightarrow$
$(2E1-E2)$: $7\log y=7 \Rightarrow y=10;\ x=100$

b) $\begin{cases} \log 125^x-\log 25^y=2\log 5 \\ \log 4^x-\log 64^y=\log 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\dfrac{125^x}{25^y}=\log 5^2 \\ \log\dfrac{4^x}{64^y}=\log 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \log\dfrac{5^{3x}}{5^{2y}}=\log 5^2 \\ \log\dfrac{2^{2x}}{2^{6y}}=\log 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 5^{3x-2y}=\log 5^2 \\ \log 2^{2x-6y}=\log 2^3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x-6y=3 \end{cases} \Rightarrow x=3/7;\ y=-5/14$

Tipo III. Aplicaciones de exponenciales y logaritmos

20. ¿Durante cuánto tiempo debes mantener 10 000 € en un banco, a una tasa del 6,1 % anual, si quieres duplicar tu capital?

a) A interés compuesto anual.
b) Si los intereses se abonan mensualmente.

a) $(1{,}061)^t=2 \Rightarrow t\ln(1{,}061)=\ln 2 \Rightarrow t=11{,}7$ años.
b) $(1+1{,}061/12)^{12t}=2 \Rightarrow 12t\ln(1+0{,}061/12)=\ln 2 \Rightarrow$
$t=11{,}4$ años.

21. Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15 % anual.
a) Si nuevo costó 24 000 €, ¿cuánto valdrá a los 6 años?
b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 5 000 €?

a) $P = 24\,000(1 - 0{,}15)^6 = 9\,051{,}59$ €.
b) t = número de años, $P = 6\,000$ €
$6\,000 = 24\,000(1 - 0{,}15)^t \Rightarrow 0{,}25 = 0{,}85t \Rightarrow$
$t = \dfrac{\log 0{,}25}{\log 0{,}85} = 8{,}53$ años

22. Admitamos que el sueldo de los funcionarios experimenta una subida anual del 3,5 %, desde el año 2 000. Si un funcionario ganaba 1 600 euros mensuales a comienzos del año 2 000, ¿cuánto tardará en ganar el doble?

$f(x)$ = sueldo de los funcionarios, x = tiempo en años
$f(x) = 1\,600(1 + 0{,}035)^x$, $x = 0$ en 2 000.
$3\,200 = 1\,600(1 + 0{,}035)^x \Rightarrow 2 = 1{,}035^x \Rightarrow \ln 2 = \ln (1{,}035)^x \Rightarrow$
$x = 20{,}15$ años.

23. Una población de conejos aumenta anualmente en un 50 %. Si en el momento inicial hay 100 conejos:
a) ¿Cuántos habrá dentro de 8 años?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

a) $f(x)$ = número de conejos, x = tiempo en años
$f(x) = 100(1 + 0{,}5)^x$
$f(8) = 100 \cdot 1{,}5^8 = 2\,562{,}89$ conejos
b) $30\,000 = 100 \cdot 1{,}5^x \Rightarrow 300 = 1{,}5^x \Rightarrow \ln 300 = \ln (1{,}5)^x \Rightarrow$
$x = 14{,}07$ años.

24. Debido a la presión ambiental, la población de conejos considerada en el problema anterior se ajusta más bien a la función $P(t) = \dfrac{10\,000}{1 + 199 \cdot e^{-0{,}5t}}$, $t = 0$ en el momento inicial.
a) ¿Cuántos había en el momento inicial?; ¿y al cabo de 8 años?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

a) La población inicial de conejos fue,
$P(0) = \dfrac{10\,000}{1 + 199 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0}} = \dfrac{10\,000}{200} = 50.$
Al cabo de 8 años,
había $P(0) = \dfrac{10\,000}{1 + 199 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 8}} = \dfrac{10\,000}{4{,}6448} \approx 2\,153$ conejos.
b) La recta $y = 10\,000$ es una asíntota horizontal $\Rightarrow$ la población de conejos nunca puede sobrepasar los 10 000 individuos.

25. En 1987, la población mundial era de unos 5 000 millones de habitantes. Si su crecimiento era de unos 80 millones por año, y suponiendo que la tasa de crecimiento permaneciese constante, ¿cuánto tiempo tardaría en duplicarse?

La tasa de crecimiento es $\dfrac{80}{5\,000} = 0{,}016$

$f(x)$ = población mundial, x = tiempo de años $\Rightarrow$
$f(x) = 5\,000(1 + 0{,}016)^x$
$10\,000 = 5\,000(1 + 0{,}016)^x \Rightarrow 2 = 1{,}016^x \Rightarrow x = 43{,}7$ años.

26. Un isótopo radiactivo decae un 9,5 % anualmente. ¿Cuál es su vida media?

$f(x)$ = cantidad de isótopo radiactivo, x = tiempo en años
$f(x) = (1 - 0{,}095)^x = (0{,}905)^x$
$0{,}5 = 0{,}905^x \Rightarrow \log 0{,}5 = x \log 0{,}905 \Rightarrow x = 6{,}94$ años.

27. Sabiendo que periodo de semidescomposición (vida media) del radio 226 es de 1 620 años, calcula la cantidad de radio que quedará de una muestra de 12 gramos al cabo de 2 000 años.

La expresión de la función que determina la cantidad existente al cabo de t años es de la forma $C(t) = C_0 e^{-kt}$, siendo C_0 la cantidad inicial.
Como su vida media es 1 620 años, transcurrido ese tiempo, de los 12 g quedarán 6; esto es $C(1\,620) = 6$.
Por tanto, $6 = 12e^{-k \cdot 1620} \Rightarrow 0{,}5 = e^{-1620k}$ (aplicando neperianos) $\Rightarrow \ln 0{,}5 = -1\,620k \Rightarrow k = 0{,}000428$.
Luego, $C(2\,000) = 12\, e^{-0{,}000428 \cdot 2\,000} = 5{,}1$ gramos.

28. Como sabemos, la expresión $C(t) = C_0 e^{-kt}$ da la cantidad de materia radiactiva de un determinado elemento al cabo de t años.
a) Comprueba que si V es la vida media de ese elemento, entonces $C(t) = C_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/V}$.
b) Halla esa expresión para el caso del radio.
c) ¿Qué cantidad de radio quedará de una muestra de 10 g al cabo de 1 500 años?

a) Como su vida media es V años,
$C(V) = \dfrac{C_0}{2} = C_0 e^{-kV} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-kV} \Rightarrow \ln 0{,}5 = \ln e^{-kV} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln 0{,}5 = -kV \Rightarrow k = -\dfrac{\ln 0{,}5}{V}.$
Por tanto, $C(t) = C_0 \cdot e^{-\left(-\frac{\ln 0{,}5}{V}\right)t} = C_0 \cdot e^{\ln 0{,}5 \cdot \frac{t}{V}} = C_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/V}$
b) La vida media del radio es de 1 620 años, por tanto:
$C(t) = C_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/1620}$
c) $C(1\,500) = 10(0{,}5)^{1\,500/1\,620} = 5{,}263$ g

29. ¿Al comenzar el año 2 001, el número de refugiados amparados por ACNUR (organismo de la ONU) era de 12,10 millones.
a) Durante el año 2000 el número de refugiados aumentó un 4 %. ¿Cuántos refugiados había a principios del 2 000?
b) Durante el año 2 001 el número de refugiados aumentó un 10 %. ¿Cuántos refugiados había a finales de 2 001?
c) Suponiendo que a partir del 2 002 haya una disminución regular del 10 % anual, ¿en qué año llegará a haber menos de un millón de refugiados?

a) Si a principios de 2 000 había x refugiados, y aumenta un 4 %, se cumple que:
$1{,}04 \cdot x = 12{,}10 \Rightarrow x = 11{,}635$ millones

b) El aumento del 10 % se obtiene multiplicando por 1,10.
A finales de 2 001 habrá: $1{,}10 \cdot 12{,}10 = 13{,}31$ millones

c) Disminuir anualmente un 10 % equivale a multiplicar por 0,9. Con esto, la función que da el número de refugiados en función del tiempo será:
$R(t) = 13{,}31 \cdot (0{,}9)^t$, t contada a partir de 2 002
Si $R(t) = 1$ millón:

$$13{,}31 \cdot (0{,}9)^t = 1 \Rightarrow 0{,}9^t = \frac{1}{13{,}31} \Rightarrow \log 0{,}9^t = \log \frac{1}{13{,}31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \log 0{,}9 = -\log 13{,}31 \Rightarrow t = \frac{-\log 13{,}31}{\log 0{,}9} \Rightarrow t = 24{,}57$$

Deben transcurrir 24,57 años. Por tanto, habrá un millón de refugiados en el año $2\,002 + 24{,}57 = 2\,026{,}57$; esto es, a mediados del 2 026.

30. Hace cuatro años que se repobló una zona con 100 ejemplares de una nueva especie de pinos. Actualmente hay 25 000 ejemplares. Se estima que el número *N* de pinos viene dado en función del tiempo, *t*, en función *N* = *AeBt*, donde *A* y *B* son dos constantes. El tiempo *t* se considera expresado en años desde el momento de la repoblación. ¿Cuánto tiempo se ha de esperar para que haya 200 000 ejemplares?

Los puntos (0, 100) y (4, 25000) verifican la función $N(t) = Ae^{Bt}$
$N(0) = Ae^0 = 100 \Rightarrow A = 100$

$$N(4) = 100e^{4B} = 25\,000 \Rightarrow B = \frac{\ln 250}{4} = 1{,}3804$$

Por tanto, la función es $N(t) = 100e^{1{,}3804t}$

$$\text{Para que } N(t) = 100e^{1{,}3804t} = 200\,000 \Rightarrow t = \frac{\log 2\,000}{1{,}3804} = 5{,}5 \text{ años.}$$

Tipo IV. Funciones trigonométricas y aplicaciones

31. Halla el periodo de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 4\text{sen}\, x$;
b) $f(x) = 4x + \text{sen}\, x$;
c) $f(x) = 4 - \text{sen}\, x$
¿En qué puntos cortan esas funciones al eje *OX*?

a) $p = 2\pi$; corta al eje en las soluciones de $4\text{sen}\, x = 0$, que son los puntos $x = k\pi$;
b) No es periódica. Corta al eje cuando $x = 0$;
c) $p = 2\pi$. No corta al eje *OX*

32. Halla el periodo de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 4 + 2\cos x$;
b) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$;
c) $f(x) = \cos 2x$
¿En qué puntos cortan esas funciones al eje *OX*?

a) $p = 2\pi$; No corta al eje *OX*.
b) $p = 4\pi$; corta al eje en las soluciones de $\cos \frac{x}{2} = 0$, que son los puntos $x = \pi + k\pi$;
c) $p = \pi$; corta al eje en las soluciones de $\cos 2x = 0$, que son los puntos $x = \pi/4 + k\pi$.

33. Halla el periodo de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 1 - \text{tg}\, x$;
b) $f(x) = \text{tg}\, 2x$;
c) $f(x) = \text{tg}\, \pi x$
¿En qué puntos cortan esas funciones al eje *OX*?

a) $p = \pi$; corta al eje en las soluciones de $1 - \text{tg}\, x = 0$, que son $x = \pi/4 + k\pi$.
b) $p = \pi/2$. Las soluciones de $\text{tg}\, 2x = 0$ son $x = k\pi/2$; esos son los puntos de corte.
c) $p = 1$. Corta en $x = k$.

34. A partir de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$, dibuja la gráfica de:
a) $f(x) = 2\text{sen}\, x$;
b) $f(x) = 2 - \text{sen}\, x$;
c) $f(x) = \text{sen}\, (x - 2)$

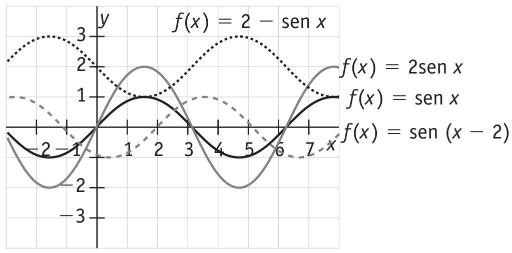


Fig. 14.10.

a) La función $f(x) = 2\,\text{sen}\, x$ multiplica por 2 todos los valores de seno de x.
b) La función $f(x) = 2 - \text{sen}\, x$ suma 2 a todos los valores de $-\text{sen}\, x$.
c) la función $f(x) = \text{sen}\, (x - 2)$ es la trasladada 2 unidades a la derecha de $y = \text{sen}\, x$

35. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, dibuja la gráfica de:
a) $f(x) = -2\cos x$;
b) $f(x) = 1 + \cos 2x$;
c) $f(x) = \cos (x - \pi)$

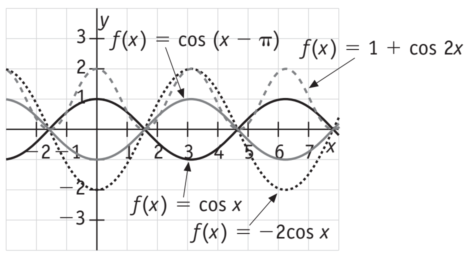


Fig. 14.11.

a) La función $f(x) = -2 \cos x$ multiplica por -2 todos los valores de $\cos x$.
b) La función $f(x) = 1 + \cos 2x$, que tiene periodo π, suma 1 a todos los valores de $\cos 2x$.
c) la función $f(x) = \cos (x - \pi)$ es la trasladada π unidades a la derecha de $y = \cos x$. Coincide con $-\cos x$.

36. A partir de las gráficas de las funciones seno y coseno dibuja la de estas funciones:
a) $f(x) = \text{sen}^2\, x$ **b) $g(x) = \text{sen}\, x + \cos x$**

En cada caso, determina el periodo. Utiliza la calculadora para precisar algún valor.

a) Como $f(x)=\text{sen}^2 x=(\text{sen } x)^2$, para dibujar su gráfica basta con hallar el cuadrado de los valores de la función $y=\text{sen } x$. Obviamente $f(x)=\text{sen}^2 x$ siempre tomará valores positivos; por tanto, su gráfica estará por encima del eje OX. Además es periódica de periodo π.
Vemos algunos valores:

x	0	1	$\pi/2$	2	π	4
y=sen x	0	0,84	1	0,91	0	−0,76
f(x)=sen²x	0	0,71	1	0,83	0	0,57

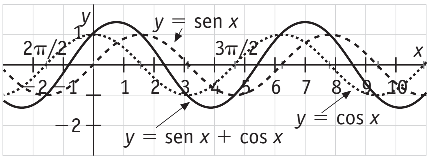


Fig. 14.12.

Periodo $=\pi$

b) Representadas las funciones sen x y cos x, para obtener los puntos de $g(x)=\text{sen } x+\cos x$ basta con sumar las ordenadas respectivas.
Vemos algunos valores:

x	0	1	$\pi/2$	2	π	4	2π
y=sen x	0	0,84	1	0,91	0	−0,76	0
y=cos x	1	0,54	0	−0,42	−1	−0,65	1
g(x)=sen x+cos x	1	1,38	1	0,49	−1	−1,41	1

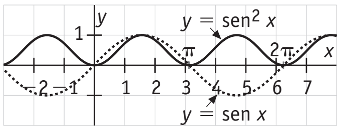


Fig. 14.13.

Periodo $=2\pi$.

37. Supongamos que el número de linces en cierta región del Canadá se puede expresar por la función:
$F(x)=40\,000+35\,000\cdot\text{sen}(0{,}6x)$.
donde x es el tiempo en años desde la fecha de partida.
El estudio de las fluctuaciones de su principal presa, la liebre, también varía sinusoidalmente con el mismo periodo. Se observó, sin embargo, que las liebres alcanzaban un máximo de 110 000 individuos dos años antes que los linces alcanzarán el suyo, siendo el mínimo estimado de liebres de 10 000.
a) Halla la función $f(x)$ que describa el número de liebres.
b) Representa las funciones $F(x)$ y $f(x)$ e indica en el gráfico el momento en que ambas poblaciones son iguales.

a) Como $f(x)$ tiene el mismo periodo que $F(x)$ el coeficiente de x será el mismo en ambas funciones. Además la gráfica de $f(x)$ está desplazada 2 unidades a la izquierda (la x se transforma en $x+2$), pues $f(x)$ alcanza el máximo dos años antes que $F(x)$. Luego
$f(x)=A+B\text{sen }[0{,}6(x+2)]$
Como el máximo (110 000) y el mínimo (10 000) de $f(x)$ se da cuando $\text{sen}[0{,}6(x+2)]$ vale $+1$ y -1, respectivamente, se tiene que:
$$\begin{cases}110\,000=A+B\\10\,000=A-B\end{cases}\Rightarrow A=60\,000,\ B=50\,000$$
De este modo, la función buscada es
$f(x)=60\,000+50\,000\text{ sen }[0{,}6(x+2)]$

b) Para representar estas funciones vamos a determinar el periodo y los puntos donde alcanzan los máximos y mínimos.
Para $F(x)$:
$$\text{periodo}=\frac{2\pi}{0{,}6}\approx 10{,}5 \text{ años}$$
Máximo: $\text{sen}(0{,}6x)=1\Rightarrow 0{,}6x=\pi/2\Rightarrow x=2{,}6$. El máximo vale $40\,000+35\,000=75\,000$.
Mínimo: $\text{sen}(0{,}6x)=-1\Rightarrow 0{,}6x=3\pi/2\Rightarrow x=7{,}9$. El mínimo vale $40\,000-35\,000=5\,000$.
Igualmente, el periodo de $f(x)$ es 10,6 años.
Su máximo y mínimo se alcanza dos años antes que $F(x)$, cuando $x=0{,}6$ y cuando $x=5{,}9$.
La representación gráfica es:

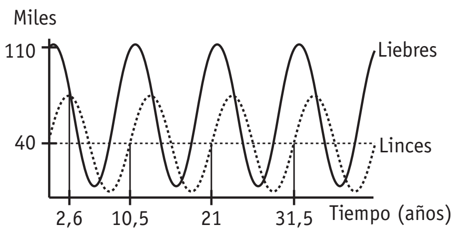


Fig. 14.14.

38. Resuelve con la calculadora la ecuación $2\cos \pi x=1{,}8$. Da la interpretación gráfica de las soluciones.

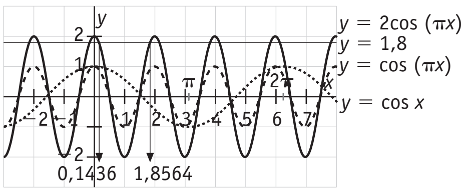


Fig. 14.15.

39. El consumo de energía eléctrica de una familia , en kilovatios hora (kWh), viene dado por la función $E(x)=600+450\cos\left(\frac{2\pi}{12}(x-1)\right)$, donde x indica los meses del año (enero = 1).
a) ¿Cuál es el consumo en enero, en julio, en octubre?
b) ¿En qué mes consume más?; ¿y en cuál menos?
c) ¿Qué periodo tiene $E(x)$?
d) Haz un esbozo de su gráfica.

a) $E(1) = 1\,050$ kWh $\quad E(7) = 150$ kWh $\quad E(9) = 600$ kWh

b) El máximo se da cuando $\cos\left(\dfrac{2\pi}{12}(x-1)\right) = 1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$

$x = 1$: en enero.
El mínimo, cuando $\cos\left(\dfrac{2\pi}{12}(x-1)\right) = -1 \Rightarrow x=7$: en julio

c) Período: $\dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{12}} = 12$

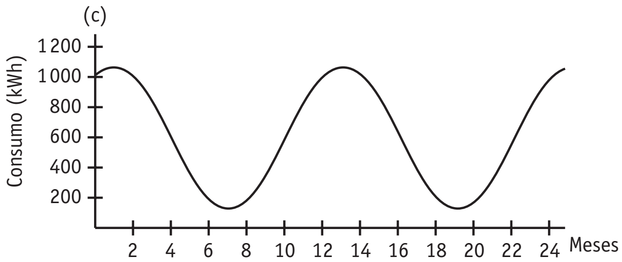


Fig. 14.16.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Sabiendo que $\log_a x=b \Leftrightarrow a^b=x$, halla:
a) $\log_3 81$ b) $\log_a a^3$ c) $\ln e^6$

a) $\log_3 81 = 4$
b) $\log_a a^3 = 3$
c) $\ln e^6 = 6$

2. Halla con la calculadora:
a) log 327 b) antlog 4,28

a) $\log 327 = 2{,}5145$
b) antlog $4{,}28 = 19\,054{,}6$

3. Resuelve:
a) $3^x=81$ b) $3^{x^2-1}=27$

a) $3^x=81 \Rightarrow x = 4$
b) $3^{x^2-1}=27 \Rightarrow x = \pm 2$

4. Resuelve
a) $3^x=10$ b) $\log_x 5=2$

a) 2,0959;
b) ± 2

5. Resuelve:
a) $\log \dfrac{x}{5}=2$ b) $\log 5^x=2$

a) $\log \dfrac{x}{5} = 2 \Rightarrow x = 500$

b) $x = \dfrac{2}{\log 5}$

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?:
a) $f(x)=2^x$ es creciente siempre.
b) $g(x)=0{,}5^x$ es decreciente siempre.
c) $h(x)=3^x$ puede tomar valores negativos.

c) $h(x)=3^x$ nunca toma valores negativos.

7. Indica las igualdades que son verdaderas:
a) $\log(A-B) = \log A - \log B$
b) $\dfrac{\log A}{\log B} = \log \dfrac{A}{B}$
c) $\log A - \log B = \log \dfrac{A}{B}$
d) $n \cdot \log A = \log A^n$
e) $(\log A)^n = n \cdot \log A^n$
f) $3 + \log A = \log(3\,000A)$

c) $\log A - \log B = \log \dfrac{A}{B}$

d) $n \cdot \log A = \log A^n$

8. Una colonia de 2 500 murciélagos aumenta su número anualmente un 12 %. ¿Cuántos murciélagos habrá al cabo de 6 años?

$4\,934 = 2\,500 \cdot (1{,}12)^6$

9. Dibuja en el intervalo $[0, 2\pi]$ las funciones seno y coseno.

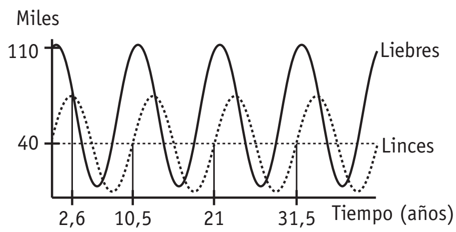


Fig. 14.17.

10. Empareja las funciones $f(x)=2+\text{sen}\,x$; $g(x)=\text{sen}\,2x$; $h(x)=\text{sen}(x+2)$ las gráficas que siguen:

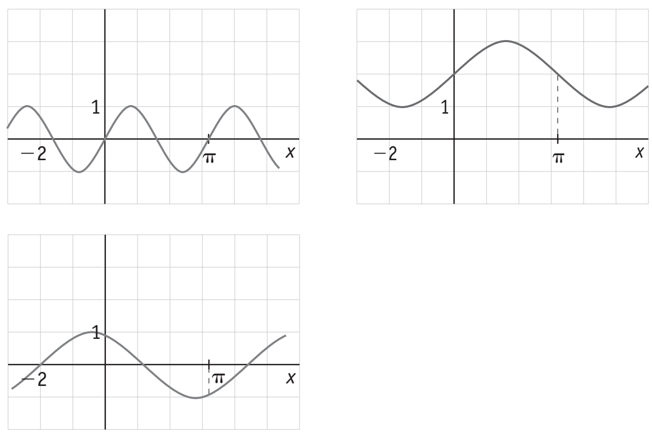


Fig. 14.18.

De izquierda a derecha: $g(x)$, $f(x)$, $h(x)$

Actividades

1. Calcula, cuando se pueda, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x-5)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4}(2^x-3x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{tg} x$

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x-5)=-4$

b) $\lim\limits_{x\to 4}(2^x-3x)=4$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$

2. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-x^3-3x^2}{x^3-4x^2+5x}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+4}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-x^3-3x^2}{x^3-4x^2+5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(3x^3-x^2-3x)}{x(x^2-4x+5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-x^2-3x}{x^2-4x+5}=\dfrac{0}{2}=0$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}=\sqrt{\dfrac{4}{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)-1}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)}{\sqrt{x-2}+1}=\dfrac{1}{2}$

4. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{4x-2}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\log\left(\dfrac{10}{2x+1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\log\left(\dfrac{2x^2}{x+5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x^2}=e^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{4x-2}{x}}=e^4$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\log\left(\dfrac{10}{2x+1}\right)=\log(0^+)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\log\left(\dfrac{2x^2}{x+5}\right)=\log(+\infty)=+\infty$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-2x+3}}{2x^2-5x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2-5x}}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+5)^2}{x^2+4x}}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+20x+25}{x^2+4x}}=\sqrt{4}=2$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-2x+3}}{2x^2-5x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^3-2x+3}}{x^2}}{\dfrac{2x^2-5x}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3-2x+3}{x^4}}}{\dfrac{2x^2-5x}{x^2}}=\dfrac{0}{2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2-5x}}=\sqrt{4}=0$

6. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}=1$. No tiene asíntotas verticales, pues el denominador nunca se hace 0.

Su gráfica aproximada es.

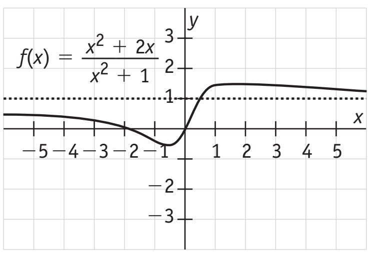


Fig. 15.1.

7. Indica los puntos en los que son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<-1 \\ x+3 & \text{si } x\geqslant -1 \end{cases}$

a) Discontinua en $x=-3$: la función no está definida.
b) Discontinua en las soluciones de $x^2-4x+3=0$, que son $x=1$ y $x=3$.
c) Continua en **R**.
En $x=-1$, la función está definida ($f(-1)=2$), además los límites laterales coinciden:
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+1)=2$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3)=2$

8. Indica el valor que hay que asignar al parámetro *a* para que la siguiente función sea continua en $x=2$:

$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x<2 \\ -x^2+x & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$

Los límites laterales deben coincidir con $f(2)=-2$.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+1)=2a+1$
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+x)=-2$
Como deben ser iguales: $2a+1=-2 \Rightarrow a=-3/2$.

Por tanto, $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}x+1 & \text{si } x<2 \\ -x^2+x & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$

Problemas propuestos

Tipo I. Cálculo de límites: definición y sustitución

1. Comprueba dando valores que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x}{x^2+1}=1{,}2$

Por la izquierda		Por la derecha	
$x\to 2^-$	$f(x)$	$x\to 2^+$	$f(x)$
1,9	1,2364	2,1	1,1645
1,99	1,2036	2,01	1,1964
1,999	1,20036	2,001	1,19964

Efectivamente, parece que el límite vale 1,2.

2. Aplicando la definición de límite, demuestra que:

a) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+3)=-1$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5}(2x-1)=9$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=4$

a) Dado $\varepsilon>0$, hay que ver que $|(2x+3)-(-1)|<\varepsilon$ siempre que $|x-2|<\delta$; el valor de δ dependerá del dado a ε.
Como $|(2x+3)-(-1)|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x+4|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<2x+4<\varepsilon$
$\Rightarrow -4-\varepsilon<2x<-4+\varepsilon \Rightarrow -2-\dfrac{\varepsilon}{2}<x<-2+\dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
$|x-(-2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta$.
Luego, para cualquier $\varepsilon\neq 0$, existe $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, tal que si $0<|x-(2)|<\delta \Rightarrow |(2x+3)-(-1)|<\varepsilon$.
Por tanto, el límite vale -1.

b) Hay que ver que dado $\varepsilon>0$, $|(2x-1)-9|<\varepsilon$, siempre que $|x-5|<\delta$. Hay que buscar el valor de δ en función del valor dado a ε.
$|(2x-1)-9|<\varepsilon \Rightarrow |2x-10|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<2x-10<\varepsilon \Rightarrow$
(transformando la desigualdad) $\Rightarrow 10-\varepsilon<2x<10+\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow 5-\dfrac{\varepsilon}{2}<x<5+\dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x-5|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta$.
Luego, para cualquier $\varepsilon>0$, existe $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, tal que si $0<|x-5|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta \Rightarrow |(2x-1)-9|<\varepsilon$
Así, si, por ejemplo, tomamos $\varepsilon=0{,}002$, habrá que tomar valores de x que se distancien de 5 menos de $\delta=\dfrac{0{,}002}{2}=0{,}001$; esto es, valores de x tales que:
$4{,}999<x<5{,}001$.

c) $\left|\left(\dfrac{x}{2}+3\right)-4\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{x}{2}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon<\dfrac{x}{2}<1+\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow 2-2\varepsilon<x<2+2\varepsilon \Rightarrow |x-2|<2\varepsilon=\delta$.
Luego, para cualquier $\varepsilon>0$, existe $\delta=2\varepsilon>0$, tal que si $0<|x-2|<2\varepsilon=\delta \Rightarrow \left|\left(\dfrac{x}{2}+3\right)-4\right|<\varepsilon$
Si, por ejemplo, tomamos $\varepsilon=0{,}01$, habrá que tomar valores de x que se distancien de 2 menos de $\delta=0{,}02$, esto es, valores de x tales que: $1{,}98<x<2{,}02$.

3. Determina gráficamente el límite cuando $x\to 2$ de las funciones:

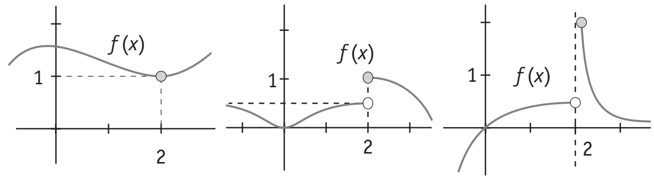


Fig. 15.2.

a) 1
b) No existe.
c) No existe.

4. Con ayuda de la calculadora halla:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2+2x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^2+2x}$

Se trata de dos indeterminaciones.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2+2x-3}$

Por la izquierda		Por la derecha	
$x\to 1^-$	$f(x)$	$x\to 1^+$	$f(x)$
0,9	−0,2564	1,1	−0,439
0,99	−0,2506	1,01	−0,24376
0,999	−0,25006	1,001	−0,2499

Parece que tiende a −0,25.

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x^2+2x}$

Por la izquierda		Por la derecha	
$x \to -2^-$	$f(x)$	$x \to -2^+$	$f(x)$
−2,1	−1,9523	−1,9	−2,0526
−2,01	−1,9950	−1,99	−2,0550
−2,001	−1,9995	−1,999	−2,0005

Parece que tiende a −2.
Nota: Conviene comprobar lo acertado del resultado mediante el cálculo sistemático de estos límites.

5. Halla, por sustitución (si se puede), los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-3x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2x+3}{x^2-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 7} \sqrt{2x-5}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2x-5}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2+x-1}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+x-1}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 2} (e^{2x-3})$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0} (2^x+3)$;

a) −2; b) −9/32;
c) 3; d) No existe;
e) $\sqrt{5}$; f) $1/\sqrt{5}$;
g) e; h) 4

6. A partir de las gráficas de sus respectivas funciones, halla:

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}$ sen x **b)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}$ cos x

c) $\lim\limits_{x\to\pi/2}$ tg x

Haciendo sus gráficas se ve que:

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \text{sen } x = 1$

b) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \text{tg } x = \infty$

7. Halla, por sustitución (si se puede), los siguientes límites de funciones trigonométricas:

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}$ sen $2x$; **b)** $\lim\limits_{x\to\pi}$ cos $3x$

c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}$ tg x **d)** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\text{sen } x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2}$ tg $(x-2)$

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \text{sen } 2x = \text{sen } \pi = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos 3x = \cos 3\pi = -1$

c) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \text{tg } x = \text{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\text{sen } x} = \dfrac{\pi}{\text{sen } \pi} = \dfrac{\pi}{0} = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \cos\left(\dfrac{1}{0}\right)$. No existe.

f) $\lim\limits_{x\to 2} \text{tg } (x-2) = \text{tg } 0 = 0$

8. Halla los límites laterales, cuando $x \to 1$, de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $g(x) = 2^{x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{\cos (x-1)}$

a) Si $x \to 1^-$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \to \left[\dfrac{1}{0^-}\right] \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \to \left[\dfrac{1}{0^+}\right] \to +\infty$

No existe el límite.

b) Si $x \to 1^-$, $g(x) = 2^{x-1} \to 2^{0^-} \to 1$
Si $x \to 1^+$, $g(x) = 2^{x-1} \to 2^{0^+} \to 1$
El límite vale 1.

c) Si $x \to 1^-$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos (x-1)} \to \dfrac{1}{\cos 0^-} = 1$

Si $x \to 1^+$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos (x-1)} \to \dfrac{1}{\cos 0^+} = 1.$

El límite vale 1.

9. Halla el límite de:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, **cuando $x \to 0$;**

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < -1 \\ 3x/(x-2) & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$, **cuando $x \to -1$**

a) Si $x \to 0^-$, $f(x) = x^2 \to 0$
Si $x \to 0^+$, $f(x) = 3x \to 0$
El límite vale 0.

b) Si $x \to -1^-$, $f(x) = x^2 - 1 \to 0$
Si $x \to -1^+$, $f(x) = 3x/(x-2) \to -3/(-3) = 1$
No existe el límite.

10. Considera la función $f(x) = (1+x)^{1/x}$, con $x > -1$ y $x \neq 0$.
a) Calcula su valor para $x = 0{,}2$, $0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$.
b) Calcula su valor para $x = -0{,}2$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$.
c) ¿Crees que existe $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es su valor?

a) y b)

x	$f(x)$
0,2	2,4883
0,1	2,5937
0,01	2,7048
0,001	2,7169

x	$f(x)$
−0,2	3,05175
−0,1	2,86797
−0,01	2,73199
−0,001	2,7196

c) Sí, pues cada vez se van acercando más los valores por la izquierda y por la derecha.
El límite vale e. (Esta respuesta debe tomarse como objetivo de ampliación.)

Nota: Obviamente estamos sugiriendo que se hable de la indeterminación 1^∞.

11. Considera la función $f(x) = x^x$, $x > 0$
a) Calcula su valor para $x = 0{,}5$, $0{,}4$, $0{,}3$, $0{,}2$, $0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$.

b) ¿Crees que existe $\lim_{x\to 0} x^x$? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es su valor?

a)

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01	0,001
$f(x)$	0,7071	0,6931	0,6968	0,7247	0,7943	0,9550	0,9931

b) $\lim_{x\to 0} x^x=1$

Nota: Con este problema podría hablarse de la indeterminación 0^0.

Tipo II. Cálculo de límites: métodos

12. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}$, halla su límite cuando x tiende a 3, 0, −2, 2 y −1

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)x}{(x-2)(x+1)}=\frac{15}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}=0$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}=\infty$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}=\infty$$

13. Halla:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2}$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}$ **d)** $\lim_{x\to 1/2}\dfrac{x+1}{2x-1}$

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}=\infty$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x+2)}=-\dfrac{1}{4}$

d) $\lim_{x\to 1/2}\dfrac{x+1}{2x-1}=\infty$

14. Halla:

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$; **b)** $\lim_{x\to -7}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$;

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x-3}{x^2-4}$; **d)** $\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-3}{(x-4)^2}$

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+7)}=$

$=\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x+7}=0$

b) $\lim_{x\to -7}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}=\dfrac{36}{0}=\infty$

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\dfrac{-5}{0}=\pm\infty$

d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-3}{(x-4)}=\dfrac{5}{0}=\infty$

15. Verifica el resultado hallado en el problema propuesto número 4.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-3)}=-\dfrac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^2+2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x(x+2)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{2-x}{x}=-2$

16. Halla:

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x}{x-1}$; **b)** $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

c) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$; **d)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2}$

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{3}{0}=\infty$

b) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$

c) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{(x-5)^2}=$

$=\lim_{x\to 5}\dfrac{x+5}{(x-5)}=\dfrac{10}{0}=\infty$

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+11x+6}{x^3-4x^2+5x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-1)(x^2-x-6)}{(x-1)(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-6}{x-2}=6$

17. Calcula:

a) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; **b)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x-4}$;

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$; **d)** $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x}$;

e) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$; **f)** $\lim_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}}$

a) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=$

$=\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x-4}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{0}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{2-\sqrt{2x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2x-4)(2\sqrt{2x})}{(2-\sqrt{2x})(2-\sqrt{2x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2x-4)(2+\sqrt{2x})}{4-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+\sqrt{2x}}{(-1)} = -4$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(\sqrt{2x+3}-x)(\sqrt{2x+3}+x)}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+3-x^2}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(3-x)(1+x)}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1+x}{\sqrt{2x+3+x}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-\sqrt{4x-3})(x+\sqrt{4x-3})}{(x^2-9)(x+\sqrt{4x-3})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{(x^2-9)(x+\sqrt{4x-3})} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)(x+\sqrt{4x-3})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{(x+3)(x+\sqrt{4x-3})} = \dfrac{1}{18}$

f) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\dfrac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\dfrac{x+5}{x}} = \sqrt{2}$

18. Halla:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x-5)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} (-3x^2+7)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (6x^2-10x+17)$; **d)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-14}{x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x-5}$

a) ∞ b) $-\infty$
c) ∞ d) 0
e) 0 f) 0

19. Halla:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-4x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$; **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{2x+7}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+8x}{x-4}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2+8x}{x-4}$

En todos los casos lo hacemos por comparación de grados.
a) 0 b) 2/5
c) 2/5 d) $+\infty$
e) $-\infty$ f) $+\infty$

20. Halla:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}}$

a) Dividimos numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x+3}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}}} = \frac{2}{1} = 2$$

b) Dividimos numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x-4}{x}}{\sqrt{\dfrac{2x^3-4x}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{\infty}} = 0$$

c) Dividimos numerador y denominador por x^2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^3+2x}{x^4}}} = \frac{2}{\sqrt{0}} = \infty$$

Tipo III. Cálculo de asíntotas

21. Determina las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;

c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+2}$

a) Tiene dos asíntotas. Una vertical, $x=1$; otra horizontal, $y=1$.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

b) Tiene dos asíntotas. Una vertical, $x=0$; otra horizontal, $y=2$.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$

c) No tiene asíntotas verticales, pues el denominador nunca es nulo.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x^2+2} = 0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

22. Calcula las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2-2x-4}{x-1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$

a) Puede tener una asíntota vertical en $x=1$, punto que anula el denominador.

Como $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-4}{x-1} = \dfrac{-3}{0} = \infty$, la recta $x=1$ es asíntota vertical.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador supera en 1 al del denominador.

Dividiendo:

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-4}{x-1} = 3x+1-\frac{3}{x-1}$$

Por tanto:

si $x \to \infty$, como $\dfrac{3}{x-1} \to 0$, la función $f(x) \to 3x + 1 \Rightarrow$ La recta $y = 3x + 1$ es una asíntota oblicua.

Naturalmente, aplicando límites obtenemos la misma expresión.

La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-4}{x(x-1)} = 3 \text{ y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-2x-4}{x-1} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1$$

Luego la recta $y = 3x + 1$ es la asíntota oblicua de la función.

b) Asíntota vertical, $x = -1$.

Dividiendo,

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} = x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

La recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua.

23. Halla la asíntota oblicua de la función $y = \dfrac{x^3-x^2+1}{2x^2-x+3}$.

La ecuación de la asíntota oblicua es, $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2+1}{x(2x^2-x+3)} = \frac{1}{2} \text{ y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-x^2+1}{2x^2-x+3} - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2+1-x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1}{2x^2-x+3} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la asíntota es: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

24. ¿Tiene asíntotas alguna de las siguientes funciones?

a) $f(x) = x^2 - 2x$; b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$;

c) $f(x) = \cos x$

a) No. Ningún polinomio tiene asíntotas.

b) No. El denominador no se anula $\Rightarrow$ no hay verticales. El grado del numerador supera en 2 al del denominador $\Rightarrow$ no hay horizontal ni oblicua.

c) No. El coseno siempre está definido y es oscilante.

25. Comprueba que las siguientes funciones tienen una asíntota horizontal hacia $-\infty$: Hállala en cada caso:

a) $f(x) = 1 + 2^x$; b) $f(x) = 2 - 2^x$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+2^x) = (1+2^{-\infty} = 1+0) = 1$. La asíntota es $y = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-2^x) = (2-2^{-\infty} = 2+0) = 2$. La asíntota es $y = 2$.

26. Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{20}{1+e^{-x}}$ tiene dos asíntotas horizontales, una hacia $-\infty$ y otra hacia $+\infty$. Hállalas.

a) Hacia $-\infty$:.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{20}{1+e^{-x}} = \left(\frac{20}{1+e^{-(-\infty)}} = \frac{20}{1+e^{+\infty}} = \frac{20}{1+\infty}\right) = 0.$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva.

b) Hacia $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{20}{1+e^{-x}} = \left(\frac{20}{1+e^{-(+\infty)}} = \frac{20}{1+e^{-\infty}} = \frac{20}{1+0}\right) = 20.$$

La recta $y = 20$ es asíntota horizontal de la curva.

27. Un alimento se introduce en un congelador. Si su temperatura (en °C) viene dada por la fórmula $T(x) = \dfrac{12+5x-12x^2}{2+x+x^2}$, donde x indica las horas que lleva en el congelador, se pide:

a) ¿Qué temperatura tenía cuando se introdujo?

b) ¿A qué temperatura estará al cabo de 2 horas?

c) ¿A qué temperatura tiende con el paso del tiempo?

a) $T(0) = \dfrac{12}{2} = 6$°C.

b) A las 2 horas, $T(2) = \dfrac{12+10-48}{2+2+4} = \dfrac{-26}{8} = -3{,}25$°C.

c) Cuando el tiempo se va alargando ($x \to \infty$) la temperatura del alimento tiende a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12+5x-12x^2}{2+x+x^2} = \frac{-12}{1} = -12\text{°C}$$

Tipo IV. Continuidad de funciones y aplicaciones

28. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

a) Continua en **R** − {0}

b) Continua en **R** − {−1, 1}

c) Continua en todo **R**.

29. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ |x+1| & \text{si } -3 \leqslant x < 0 \\ 2x^2-4x+3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Comprueba el resultado haciendo su gráfica.

a) Esta función puede no ser continua en $x = -3$ y en $x = 0$, que son los puntos de unión de los intervalos. En esos puntos hay que ver si la función está definida y si su valor coincide con el de los límites laterales.

En $x = -3$:

Si $x \to -3^-$, $f(x) = 2 \to 2$

Si $x \to -3^+$, $f(x) = |x+1| \to 2$

Como $f(-3) = |-3+1| = 2$, los tres valores coinciden: la función es continua en $x = -3$.

En $x = 0$

Si $x \to 0^-$, $f(x) = |x+1| \to 1$

Si $x \to 0^+$, $f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \to 3$

Como los límites laterales no coinciden, la función no es continua en $x = 0$.

b) Su representación gráfica es:

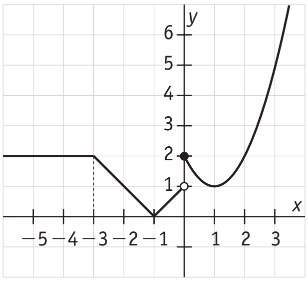


Fig. 15.3.

Efectivamente, el único punto de discontinuidad es $x = 0$.

30. ¿Para qué valores de k la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+kx}$ tiene dos discontinuidades? Hállalas cuando $k = -1$?

Se dan en los puntos que anulan el denominador: $x^2+kx=0 \Leftrightarrow x(x+k)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=-k$.
Si $k=-1$, serán los puntos $x=0$ y $x=1$. En el caso $x=0$ la discontinuidad es inevitable; para $x=1$, puede evitarse, pues $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=1$

31. ¿Para qué valores de k la función $f(x)=\dfrac{x+k}{x^2-2x-3}$ tiene una discontinuidad evitable?

Discontinua en $x=-1$ y $x=3$.
$f(x)=\dfrac{x+k}{(x+1)(x-3)}$
Por tanto:
Si $k=1$ puede evitarse en $x=-1$.
Si $k=-3$ puede evitarse en $x=3$.

32. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<2 \\ 3x & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<2 \\ x+1 & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$

a) Punto conflictivo, $x=2$.
Si $x\to 2^-$, $f(x)\to 3$
Si $x\to 2^+$, $f(x)\to 6 \Rightarrow$ No es continua en $x=2$.

b) Punto conflictivo, $x = 2$.
Si $x\to 2^-$, $f(x)\to 3$
Si $x\to 2^+$, $f(x)\to 3 \Rightarrow$ Es continua en $x=2$, y siempre.

33. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leqslant 1 \\ 3+ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$, ¿para qué valores de a la función $f(x)$ es continua en $x=1$? Comprueba gráficamente que tu resultado es correcto.

Para que sea continua en $x=1$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=2$.
Los límites laterales deben ser iguales:
Si $x\to 1^-$, $f(x)\to 2$
Si $x\to 1^+$, $f(x)\to 3-a$
Por tanto, $2=3-a \ \to\ a=1$
Si $a=1$ la función es $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leqslant 1 \\ 3-x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$.
Su gráfica, que obtenemos dando valores es:

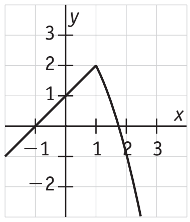


Fig. 15.4.

34. Sea $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x>0 \end{cases}$.

a) ¿Por qué no es continua en $x=0$?
b) ¿Qué valor hay que asignar a 0 para sea continua para todo número real?

a) No es continua en $x=0$ porque en ese punto no está definida.
b) La discontinuidad podrá evitarse si existiese el límite en $x=0$.
Como
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^3+1)=1$ es igual que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^x=1$
el límite existe y vale 1.
Por tanto, definiendo $f(0)=1$, se evita la discontinuidad.
En consecuencia, $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\leqslant 0 \\ e^x & \text{si } x>0 \end{cases}$ es continua.

35. Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<5 \\ 4x+k & \text{si } x\geqslant 5 \end{cases}$

Para que sea continua deben ser iguales los límites laterales en $x=5$.
$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}(x^2-1)=24$
$\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to5^+}(4x+k)=20+k$
Para que $24=20+k \Rightarrow k=4$.

36. Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<3 \\ x+k & \text{si } x\geqslant 3 \end{cases}$

Para que sea continua deben ser iguales los límites laterales en $x=3$.
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} x^2=9$
$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}(x+k)=3+k$
Para que $9=3+k \Rightarrow k=6$.

37. Halla los valores de a y b para que sea continua la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^3-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Por separado, cada una de las funciones que intervienen son continuas. Por tanto, las únicas dificultades se dan en los puntos $x=0$ y $x=2$.
Para que sean continuas deben coincidir los límites laterales en cada punto.
En $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+3)=3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b \Rightarrow b=3.$

En $x=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^3-1)=7 \Rightarrow 7=2a+3 \Rightarrow a=2.$

La función continua es:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } x<0 \\ 2x+3 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^3-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

38. Sea la función: $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & \text{si } x\leqslant 0 \\ 2(a+x) & \text{si } 0<x<1 \\ b/x^2 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$

Determina a y b para que la función sea continua para todo valor real de x.

La función está definida en todo **R.** La única dificultad para la continuidad está en $x=0$ y en $x=1$, que son los puntos de unión de los diferentes trozos.
Para que sea continua deben existir los límites laterales en esos puntos y coincidir con su valor de definición.
En $x=0$:
$f(0)=2$
Si $x\to 0^-$, $f(x)\to 2$.
Si $x\to 0^+$, $f(x)\to 2a \Rightarrow 2=2a \Rightarrow a=1$
En $x=1$:
$f(1)=b$
Si $x\to 1^-$, $f(x)\to 2(a+1)=4$.
Si $x\to 1^+$, $f(x)\to b \Rightarrow b=4$.

Con esto, $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & \text{si } x\leqslant 0 \\ 2+2x & \text{si } 0<x<1 \\ 4/x^2 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$

39. Dada la función $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, se pide:
a) Estudia razonadamente su continuidad.
b) Estudia razonadamente sus asíntotas.

La función no está definida en $x=-1$. Luego, la función es continua en $\mathbf{R}-\{-1\}$.
En $x=-1$ hay una asíntota vertical, hacia menos infinito, pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty$

También tiene una asíntota oblicua, $y=mx+n$, siendo

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x+1)}=1$ y

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=-2$

La asíntota es: $y=x-2$.

40. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=|x|-x$ **b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$**

Haz su representación gráfica.

a) $f(x)=|x|-x\begin{cases} -2x & x<0 \\ 0 & x\geqslant 0 \end{cases}$

Es continua siempre.

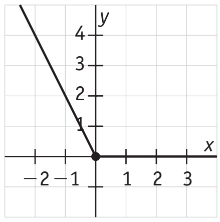


Fig. 15.5.

b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

No está definida en $x=0 \Rightarrow$ no es continua en ese punto.

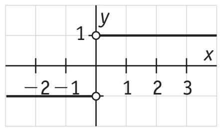


Fig. 15.6.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 20 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Para la función

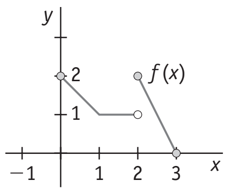


Fig. 15.7.

Halla:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$** **c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$**

d) ¿Tiene límite la función en $x=2$?

a) 1
b) 1
c) 2
d) No. Los límites laterales no coinciden.

2. **Halla:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-1}{2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4}{x-4}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \cos(x-1)$

a) $-1/2$ b) ∞ c) 1

3. **Halla:**

a) $\lim\limits_{x\to 3} 2^{3x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} 4^{1/x}$

a) 2^6 b) 2

4. **Halla:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{2x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-2}{x+100}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-2}{x^3+100x}$

a) 3/2 b) ∞ c) 0

5. **Halla:**

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x+6}{x-5}}$

a) 4 b) 2

6. **Determina el valor de** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x+1) = -1$$

7. **Dada** $f(x) = \begin{cases} x-1 & x<1 \\ 1/x & x\geqslant 1 \end{cases}$ **halla sus límites laterales en** $x=1$.

Izquierda: 0; derecha: 1

8. **¿Qué valor hay que dar a** k **para que la función** $f(x) = \begin{cases} kx-1 & x<1 \\ 1/x & x\geqslant 1 \end{cases}$ **sea continua en** $x=1$?

Izquierda: $k-1$; derecha: $1 \Rightarrow k-1=1 \Rightarrow k=2$.

9. **Determina las asíntotas de** $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

Vertical: $x=1$; horizontal: $y=2$.

10. **¿En qué puntos no es continua la función** $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$**? ¿Puede evitarse la discontinuidad en alguno de esos puntos? ¿Cómo?**

No es continua en $x=-1$, $x=1$ y $x=2$.

Puede evitarse en $x=1$,

pues $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+3)}{(x+1)(x-2)} = -2$

Se evita definiendo $f(1) = -2$.

2 cuestiones para investigar

1. **Demuestra geométricamente que** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$. **Sugerencia. Observa la figura adjunta.**
Obtén las funciones que dan el área del sector ***OCA*****, del triángulo** ***OPB*** **y del sector** ***OPB*****; compáralas y haz los límites adecuados cuando** $x \to 0$.

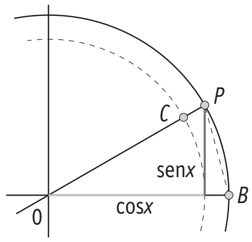


Fig. 15.8.

En la figura adjunta, el radio del círculo vale 1.

Área del sector $OPB = \dfrac{x}{2}$

Área del triángulo $OPB = \dfrac{\text{sen } x}{2}$

Área del sector $OCA = \dfrac{x\cos^2 x}{2}$

Se cumple que:

Área del sector $OPB \geqslant$ Área del triángulo $OPB \geqslant$ Área del sector OCA

Por tanto,

$$\frac{x}{2} \geqslant \frac{\text{sen } x}{2} \geqslant \frac{x\cos^2 x}{2} \Rightarrow x \geqslant \text{sen } x \geqslant x\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \geqslant \frac{\text{sen } x}{x} \geqslant \cos^2 x$$

Pasando al límite:

$$\lim_{x\to 0} 1 \geqslant \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \geqslant \lim_{x\to 0} \cos^2 x \Rightarrow 1 \geqslant \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

2. **El problema del infinito suscita grandes dificultades desde la antigüedad. Como muestra de ellos puedes investigar las paradojas de Zenón de Elea: Busca la página web** **http://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zen%C3%B3n**

Actividades

1. Para la misma función halla:
a) La tasa de variación media en el intervalo $[1, 1+h]$. ¿Cuánto vale si $h = 0{,}2$?
b) La tasa de variación instantánea en el punto $x = 1$.

a) $f(1+h) = -(1+h)^2 + 6(1+h) = 5 + 4h - h^2$; $f(1) = 5$.
La tasa pedida es:
$$TVM[1, 1+h] = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{4h - h^2}{h} = 4 - h$$
Cuando $h = 0{,}2$, la $TVM[1, 1+0{,}2] = 3{,}8$.
b) Cuando $h \to 0$, $TVM[1, 1+h] = 4 - h \to 4$.
La tasa de variación instantánea en el punto $x = 1$, vale 4.

2. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto $x = 3$. Representa gráficamente la curva y la tangente.

$y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow y - 3 = 4(x-3) \Rightarrow y = 4x - 9$

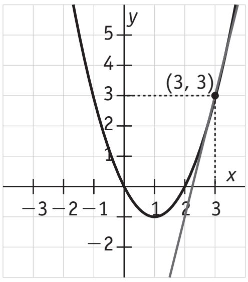


Fig. 16.1.

3. Halla, siguiendo los cuatro pasos anteriores, la función derivada de $f(x) = -x^2 + 6x$. Una vez hallada $f'(x)$, calcula $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$ y $f'(5)$.

1.º $f(x+h) = -(x+h)^2 + 6(x+h) =$
$= -x^2 - 2xh - h^2 + 6x + 6h$
2.º $f(x+h) - f(x) = -x^2 - 2xh - h^2 + 6x + 6h - (-x^2 + 6x) =$
$= -h^2 - 2xh + 6h$
3.º y 4.º $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 2xh + 6h}{h} = -2x + 6$
Por tanto, $f'(x) = -2x + 6$; de donde:
$f'(0) = 6$; $f'(2) = 2$; $f'(3) = 0$ y $f'(5) = -4$.

4. Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = -3(5x^2 - x)^4$; **b) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$;**
c) $y = \sqrt{\text{sen } x}$; **d) $y = 3x^{3/4}$;**
e) $y = xe^x$; **f) $y = xe^{-x}$;**

a) $y' = -12(5x^2 - x)^3(10x - 1)$
b) $y' = \dfrac{2(x^2+x) - (2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2+x)^2}$
c) $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$
d) $y' = \dfrac{9}{4}x^{-1/4} = \dfrac{9}{4\sqrt[4]{x}}$
e) $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$
f) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

5. Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = \log 7x$; **b) $y = \ln 5x$;**
c) $y = \ln\left(\dfrac{4}{1+3x}\right)$; **d) $y = \cos x^2$;**
e) $y = -\text{sen } 2x$; **f) $y = \cos^2 x$;**
g) $y = \text{sen } x \cdot \cos x$; **h) $y = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$;**
i) $y = \dfrac{1}{\text{tg } x}$; **j) $y = 3\arccos(2x)$**

a) $y' = \dfrac{7}{7x}\log e = \dfrac{1}{x}\log e$
b) $y' = \dfrac{5}{5x} = \dfrac{1}{x}$
c) $y' = \ln\left(\dfrac{4}{1+3x}\right) = \ln 4 - \ln(1+3x) \Rightarrow y' = \dfrac{-3}{1+3x}$
d) $y' = -2x\text{sen } x^2$
e) $y' = -2\cos 2x$
f) $y' = 2\cos(-\text{sen } x)$
g) $y' = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
h) $y' = \dfrac{-\text{sen } x \text{ sen } x - \cos x \cos x}{(\text{sen } x)^2} = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$
i) (Es igual que la anterior) $y' = \dfrac{-(1 + \text{tg}^2 x)}{\text{tg}^2 x} = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$
j) $y' = \dfrac{-3 \cdot 2}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \dfrac{-6}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

6. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$. ¿Tiene máximo o mínimo?

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.
Si $x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente: intervalo $(-\infty, 1)$.
Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$
la función es creciente: intervalo $(1, +\infty)$.
Como decrece a la izquierda del 1 y crece a su derecha, en $x = 1$ hay un punto mínimo. Ese mínimo vale $f(1) = 0$.

7. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 3x$, siguiendo los pasos indicados anteriormente.

1. $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}$
2 y 3. $f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
Los puntos singulares, posibles máximos o mínimos, son: $x = -1$, $x = 1$
4 y 5. Se marcan esos puntos en la recta.
Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ es creciente.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

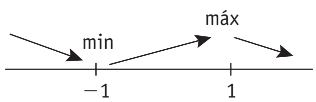


Fig. 16.2.

6. En $x = -1$ hay un mínimo; en $x = 1$, un máximo.
7. Algunos puntos:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	-2 (mín)	0	2 (máx)	-2

Cortes con los ejes:
Si $x = 0$, $f(0)=0$, punto (0, 0), que ya ha salido.
Si $y = 0$, $-x^3+3x=0 \Rightarrow x(3-x^2)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$, $x = 0$
Puntos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

8. Representamos los puntos hallados y los unimos con una línea curva.
Se obtiene así la gráfica adjunta.

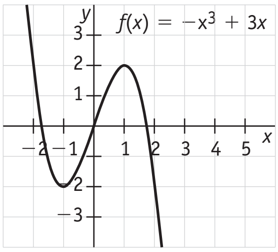


Fig. 16.3.

7. Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$. Es impar: $f(-x) = -f(x)$
- En $x = 0$ tiene una asíntota vertical.
- Como $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$, la recta $y=x$ es una asíntota oblicua.

También puede verse que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2} = -1 = m \text{ y}$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = n$$

Derivadas:
$f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{x^2} < 0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.
Su gráfica es la adjunta.

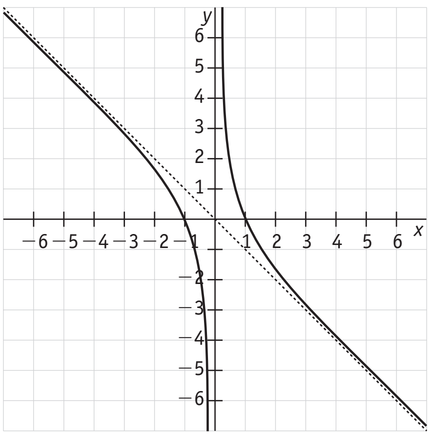


Fig. 16.4.

Algunos valores:

x	-4	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	15/4	3/2	0	0	$-3/2$	$-15/4$

Problemas propuestos

Tipo I: Tasas y derivadas

1. Halla la tasa de variación media en el intervalo [1, 4] de las funciones:
a) $f(x)=x^2+2$
b) $f(x)=x^2+2x$
c) $f(x)=-x^2+2x$
d) ¿Qué significan los resultados hallados?

a) $TVM[1,4]=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{18-3}{3}=\dfrac{15}{3}=5$

b) $TVM[1,4](x^2+2x)=\dfrac{24-3}{4-1}=7$

c) $TVM[1,4](-x^2+2x)=\dfrac{-8-1}{4-1}=-3$

d) La función $f(x)=x^2+2$ crece 15 unidades cuando la x crece 3 (la x pasa de valer 1 a valer 4). Luego por cada aumento unitario de x, la función tiene un aumento medio de 5 unidades.
Por cada aumento unitario de x, la función $f(x)=x^2+2x$ tiene un aumento medio de 7 unidades.
Por cada aumento unitario de x, la $f(x)=-x^2+2x$ tiene una disminución media de 3 unidades.

2. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=-x^2+4x$ en los intervalos:
a) [0, 1] b) [0, 2] c) [0, 3]

a) $TVM[0,1]=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{3-0}{1}=3$

b) $TVM[0,2]=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{4}{2}=2$

c) $TVM[0,3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{3-0}{3}=1$

3. El efecto de una anestesia t horas después de ser administrada viene dada por la expresión $A(t)=\dfrac{16-t^2}{16}$, con $t\leqslant 4$. Halla:
a) La tasa de variación media del efecto durante la primera hora.
b) La TVM en el intervalo de tiempo [2, 2 + h].
c) La tasa de variación instantánea en el instante $t = 2$.

a) Durante la 1.ª hora es el intervalo [0, 1] $\Rightarrow$
$\Rightarrow TVM[0,1]=\dfrac{A(1)-A(0)}{1-0}=\dfrac{15/16-1}{1}=-\dfrac{1}{16}$ (Lo que significa que la anestesia disminuye su efecto durante la primera hora a una velocidad media de 1/16.)

b) $TVM[2,2+h]=\dfrac{A(2+h)-A(2)}{2+h-2}=\dfrac{16-(2+h)^2-12}{16h}=$
$=-\dfrac{4+h}{16}$

c) $TVI[t=2]=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{4+h}{16}\right)=-\dfrac{1}{4}$ (Lo que significa que la anestesia disminuye su efecto a las 2 horas a razón de 1/4 por hora.)

4. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] para cada una de las funciones:

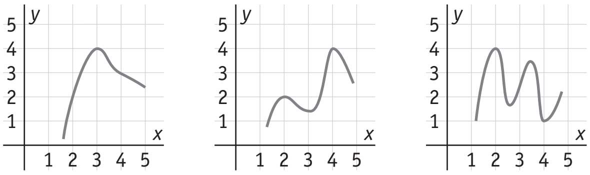


Fig. 16.5.

En los tres casos hay que calcular $\dfrac{f(4)-f(2)}{2}$

a) $\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{4-2}{2}=1$; c) $\dfrac{1-4}{2}=-\dfrac{3}{2}$

Tipo II. Teoría de derivadas

5. Observa las figuras anteriores.
a) En el punto $x=2$, ¿cuál de ellas tiene derivada mayor?
b) En el punto $x=4$, ¿cuál de ellas tiene derivada negativa?
c) En cada caso, indica (aproximadamente) los puntos con derivada 0.

a) Trazamos las respectivas tangentes y comparamos. Es mayor la de la figura a). En los casos b) y c) la tangente en $x=2$ tiene pendiente 0.
b) También en el caso a).
c) En a), 3; en b), 2, 3 y 4; en c), 2, 2,5, 3,3 y 4.

6. Aplicando la definición de derivada, halla $f'(-2)$ siendo $f(x)=x^2-3x$.

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

Como $f(-2)=10$ y
$f(-2+h)=(-2+h)^2-3(-2+h)=10-7h+h^2$, se tiene:

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{10-7h+h^2-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-7h+h^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-7+h)}{h}=-7$$

7. Halla los puntos de la curva $y=x^3-3x^2+2$ en los que su derivada vale:
a) –3 b) 0 c) 2

$y'=3x^2-6x$
a) $y'=-3 \Rightarrow 3x^2-6x=3 \Rightarrow 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x=1$
b) $y'=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$
c) $y'=2 \Rightarrow 3x^2-6x=2 \Rightarrow 3x^2-6x-2=0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{60}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{3}$$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^2+3x$ en el punto $x=-1$. Representa gráficamente la curva y la tangente.

La ecuación de dicha recta tangente es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
Como $f(-1)=-2$ y $f'(-1)=1$, se tendrá:
$y-(-2)=1(x-(-1)) \Leftrightarrow y=x-1$

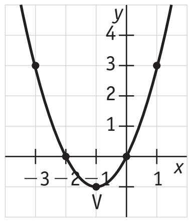


Fig. 16.6.

9. Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por la expresión $e=f(t)=20t-2t^2$.
a) Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $t=0$ y $t=5$ segundos.
b) ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así, ¿a qué altura sucedió?

a) Se trata de calcular la tasa de variación media en el intervalo [0, 5], que vale:
$\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0}=\dfrac{50-0}{5}=10$ m/s
b) La velocidad de la piedra en el instante t viene dada por la derivada, $f'(t)=20-4t$
Vale 15 cuando $20-5t=15 \Rightarrow t=\dfrac{5}{4}$.
Su altura en ese instante es $f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{175}{8}$ metros.

10. ¿En qué puntos del intervalo (–3, 3) no es derivable la siguiente función? Indica el motivo.

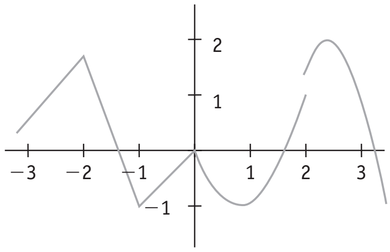


Fig. 16.7.

En $x=-2$, $x=-1$ y $x=0$ por ser picos.
En $x=2$ por no ser continua.

11. ¿En qué puntos no son derivables las siguientes funciones?

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-1)(x+5)}$

a) No es derivable en $x=-1$ porque no está definida en ese punto.
b) Por lo mismo, no es derivable en $x=1$ y en $x=-5$.

12. ¿Para qué valor de k es derivable la función
$$f(x)=\begin{cases} x^2+kx & x<-1 \\ x-1 & x\geq -1 \end{cases}$$ **en el punto $x=-1$?**

El único punto que presenta dificultades es $x = -1$.
Continuidad:
Si $x \to -1^-$, $f(x)=x^2+kx \to 1+k$
Si $x \to -1^+$, $f(x)=x-1 \to -2$
Será continua si $1+k=-2 \Rightarrow k=-3$.
Por tanto, $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x<-1 \\ x-1 & x\geqslant -1 \end{cases}$.
Ya hemos visto que esta función es derivable en todos sus puntos.

13. ¿Para qué valor o valores de k es derivable la función $f(x)=\begin{cases} k^2x^2+x & x<-1 \\ x-1 & x\geqslant -1 \end{cases}$ en el punto $x=-1$?

Como antes, el único punto que presenta dificultades es $x=-1$.
Continuidad:
Si $x \to -1^-$, $f(x)=k^2x^2+x \to k^2-1$
Si $x \to -1^+$, $f(x)=x-1 \to -2$
Será continua si $k^2-1=-2 \Rightarrow k^2=-1$. Como esta igualdad es imposible, la función no es continua para ningún valor de k. En consecuencia, tampoco puede ser derivable.

14. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2+k & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Determina k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$.
b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor de k calculado derivable en $x=1$?

a) La función está definida en $x=1$, siendo $f(1)=7$. Para que sea continua, además, debe tener límite en ese punto y coincidir con su valor de definición.
Por la izquierda: Si $x \to 1^-$, $f(x) \to 7$
Por la derecha: Si $x \to 1^+$, $f(x) \to 1+k \Rightarrow$
$\Rightarrow 7=1+k \Rightarrow k=6$
Por tanto, $f'(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<1 \\ x^2+6 & \text{si } x>1 \end{cases}$ es continua en $x=1$ (y siempre).

b) Salvo en $x=1$, $f'(x)=\begin{cases} 2 & x<1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$
La función será derivable en $x=1$ cuando las derivadas laterales sean iguales.
Como $f'(1^-)=2$ y $f'(1^+)=2$, la función es derivable en $x=1$.

Tipo III. Práctica de derivadas

15. Deriva y simplifica los cálculos cuando sea posible.
a) $y=2x^2-5x+6$ **b) $y=-3x^4+2x^2+7x-3$**
c) $y=x^4-5x^3+2x$ **d) $y=\frac{2}{3}x^3-x$**

a) $y'=4x-5$
b) $y'=-12x^3+4x+7$
c) $y'=4x^3-15x^2+2$
d) $y'=2x^2-1$

16. a) $y=\frac{3}{4}x^4+7x$ **b) $y=\frac{3x^4}{4}+7x$**
c) $y=\frac{3x^4+7x}{4}$ **d) $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{7}x+3$**

a) $y'=3x^3+7$;
b) $y'=3x^3+7$;
c) $y'=\frac{12x^3+7}{4}$;
d) $y'=\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}$;

17. Deriva y simplifica las siguientes funciones.
a) $y=(x^2+2x-1)(2x^2-3)$;
b) $y=2(x^2+3)(x^2-5x)$;
c) $y=-(x^2-3x+5)(2x+4)$

a) $y'=(2x+2)(2x^2-3)+(x^2+2x-1)(4x)=$
$=8x^3+12x^2-10x-6$
b) $y'=2(2x)(x^2-5x)+2(x^2+3)(2x-5)=$
$=8x^3-30x^2+12x-30$
c) $y'=-(2x-3)(2x+4)-(x^2-3x+5)\cdot 2=-6x^2+4x+2$

18. Para las funciones anteriores, haz primero la multiplicación indicada, deriva después y comprueba que el resultado coincide.

a) $y=(x^2+2x-1)(2x^2-3)=2x^4+4x^3-5x^2-6x+3 \Rightarrow$
$y'=8x^3+12x^2-10x-6$
b) $y=2(x^2+3)(x^2-5x)=2x^4-10x^3+6x^2-30x \Rightarrow$
$y'=8x^3-30x^2+12x-30$
c) $y=-(x^2-3x+5)(2x+4)=-2x^3+2x^2+2x-20 \Rightarrow$
$y'=-6x^2+4x+2$

19. Deriva:
a) $y=(x+4)^5$ **b) $y=(3x-2)^4$**
c) $y=(x^2+2)^3$ **d) $y=-3(5x+1)^4$**

a) $y'=5(x+4)^4$
b) $y'=4(3x-2)^3\cdot 3=12(3x-2)^3$
c) $y'=3(x^2+2)^2\cdot 2x=6x(x^2+2)^2$
d) $y'=-12(5x+1)^4\cdot 5=-60(5x+1)^3$

20. Deriva:
a) $y=\frac{2x-3}{5x}$ **b) $y=\frac{2x}{x^2+3x}$**
c) $y=\frac{2}{4x^2+3}$ **d) $y=\frac{x^2-3x}{x^2-1}$**

a) $y'=\frac{2\cdot 5x-(2x-3)\cdot 5}{(5x)^2}=\frac{15}{25x^2}=\frac{3}{5x^2}$
b) $y'=\frac{2(x^2+3x)-2x(2x+3)}{(x^2+3x)^2}=\frac{-2x^2}{(x^2+3x)^2}$
c) $y'=\frac{-2\cdot 8x}{(4x^2+3)^2}=\frac{-16x}{(4x^2+3)^2}$
d) $y'=\frac{(2x-3)(x^2-1)-(x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-2x^2+3}{(x^2-1)^2}$

21. Deriva y simplifica cuando sea posible.
a) $y=\frac{1}{5x}$; **b) $y=\frac{-3}{x^2}$;** **c) $y=\frac{2}{x^3}$**

a) $y'=\frac{-1}{5x^2}$ b) $y'=\frac{6}{x^3}$ c) $y'=\frac{-6}{x^4}$

22. Deriva y simplifica:

a) $y=\sqrt{3x^2+4x-5}$; **b)** $y=\sqrt{(1+5x)^3}$

a) $y'=\dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-5}}=\dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-5}}$

b) $y'=\dfrac{3(1+5x)^2\cdot 5}{2\sqrt{(1+5x)^3}}=\dfrac{15(1+5x)}{2\sqrt{1+5x}}=\dfrac{15}{2}\sqrt{1+5x}$

23. Deriva y simplifica:

a) $y=(1+2x^3)\sqrt{x^2-5x+2}$; **b)** $y=\dfrac{3}{7}\sqrt{x^2-x}$

a) $y'=6x^2\sqrt{x^2-5x+2}+(1+2x^3)\cdot\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+2}}$

b) $y'=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{6x-3}{14\sqrt{x^2-x}}$

24. Deriva:

a) $y=\sqrt[3]{3x-2x^3}$; **b)** $y=\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}$

a) $y=\sqrt[3]{3x-2x^3}=(3x-2x^3)^{1/3}\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{3}(3x-2x^3)^{-2/3}\cdot(3-6x^2)=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt[3]{(3x-2x^3)^2}}$

b) $y'=\dfrac{2}{3}(x^2+2x)^{-1/3}(2x+2)$

25. Deriva:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{2x}}$; **b)** $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x^2}}$;

c) $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-3x}{2-x^2}}$

a) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

b) $y'=\dfrac{\dfrac{2x^2-(2x-3)2x}{x^4}}{2\sqrt{\dfrac{2x-3}{x^2}}}=\dfrac{-x^2+3x}{x^3\sqrt{2x-3}}$

c) $y'=\dfrac{\dfrac{(4x-3)(2-x^2)-(2x^2-3x)(-2x)}{(2-x^2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x^2-3x}{2-x^2}}}\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\dfrac{-3x^2+8x-6}{2(2-x^2)^2\cdot\sqrt{\dfrac{2x^2-3x}{2-x^2}}}$

26. Deriva:

a) $y=2^{x^2-3}$ **b)** $y=3^{2x-x^2}$

c) $y=(2x+1)e^{2x+1}$

a) $y'=2x\cdot 2^{x^2-3}\ln 2$

b) $y'=(2-2x)\cdot 3^{2x-x^2}\ln 3$

c) $y'=2e^{2x+1}+(2x+1)2e^{2x+1}=(4x+4)e^{2x+1}$

27. **a)** $y=\dfrac{e^x}{x}$; **b)** $y=\dfrac{xe^x}{1-x}$;

c) $y=e^{\sqrt{x}}$; **d)** $y=\sqrt{e^x}$

a) $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $y'=\dfrac{(e^x+xe^x)(1-x)-xe^x(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{(1+x-x^2)e^x}{(1-x)^2}$

c) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

d) $y=\sqrt{e^x}=e^{x/2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}e^{x/2}$

28. Deriva y simplifica (piensa si puedes utilizar las propiedades de los logaritmos).

a) $y=\log(5x^2)$ **b)** $y=\log(5x)^2$

c) $y=(\log(5x))^2$ **d)** $y=\log\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)$

a) $y=\log(5x^2)=\log 5+2\log x\Rightarrow y'=\dfrac{2}{x}\log e$

b) $y=\log(5x)^2=2\log(5x)=2\log 5+2\log x\Rightarrow y'=\dfrac{2}{x}\log e$

c) $y'=2(\log(5x))\cdot\dfrac{5}{5x}\cdot\log e=\dfrac{2\log(5x)\log e}{x}$

d) $y=\log\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)\cdot\log(2x-1)-\log x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\left(\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{2}{x}\right)\log e$

29. Deriva y simplifica:

a) $y=\ln(2x^2+3)$; **b)** $y=\ln(x^2+3)^2$

c) $y=\ln(2x^2+3)^2$; **d)** $y=(\ln(2x^2+3))^2$

a) $y'=\dfrac{4x}{2x^2+3}$

b) $y=\ln(x^2+3)^2=2\ln(x^2+3)\Rightarrow y'=\dfrac{4x}{x^2+3}$

c) $y=\ln(2x^2+3)^2=2\ln(2x^2+3)\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=2\cdot\dfrac{4x}{2x^2+3}=\dfrac{8x}{2x^2+3}$

d) $y'=2(\ln(2x^2+3))\cdot\dfrac{4x}{2x^2+3}=\dfrac{8x\ln(2x^2+3)}{2x^2+3}$

30. Deriva y simplifica:

a) $y=\ln\sqrt{3x}$ **b)** $y=\sqrt{\ln 3x}$

c) $y=\ln(3\sqrt{x})$ **d)** $y=\ln(3-\sqrt{x})$

a) $y=\ln\sqrt{3x}=\ln(3x)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln 3x=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln x\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2x}$

b) $y'=\dfrac{1/x}{2\sqrt{\ln 3x}}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln 3x}}$

c) $y=\ln(3\sqrt{x})=\ln 3+\ln\sqrt{x}=\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2x}$

d) $y'=\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}}{3-\sqrt{x}}=\dfrac{-1}{6\sqrt{x}-2x}$

31. Deriva y simplifica:

a) $y=\ln\left(\dfrac{x^2}{3}\right)$ **b)** $y=\dfrac{\ln x^2}{3}$

c) $y=\dfrac{\ln x}{\ln 3}$

a) $y'=\ln\left(\dfrac{x^2}{3}\right)=\ln x^2-\ln 3=2\ln x-\ln 3 \Rightarrow y'=\dfrac{2}{x}$

b) $y=\dfrac{\ln x^2}{3}=\dfrac{2}{3}\ln x \Rightarrow y'=\dfrac{2}{3x}$

c) $y=\dfrac{\ln x^2}{\ln 3}=\dfrac{2\ln x}{\ln 3} \Rightarrow y'=\dfrac{2}{\ln 3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x\ln 3}$

32. Deriva:

a) $y=3\operatorname{sen} x-5\cos x$ **b)** $y=x\operatorname{sen} 3x$

c) $y=\cos x\cdot\operatorname{sen} x$ **d)** $y=\cos 3x\cdot\operatorname{sen} x$

a) $y'=3\cos x+5\operatorname{sen} x$

b) $y'=\operatorname{sen} 3x+x3\cos 3x=\operatorname{sen} 3x+3x\cos 3x$

c) $y'=-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x\cdot\cos x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos 2x$

d) $y'=-3\operatorname{sen} 3x\cdot\operatorname{sen} x+\cos 3x\cdot\cos x$

33. Deriva:

a) $y=x^2\cos 4x$ **b)** $y=2x^3-\operatorname{sen} 5x$

c) $y=\operatorname{sen}^2(3x-1)$ **d)** $y=\dfrac{\cos 2x}{x}$

a) $y'=2x\cos 4x-4x^2\operatorname{sen} 4x$

b) $y'=6x^2-5\operatorname{sen} 5x$

c) $y'=2\operatorname{sen}(3x-1)\cdot 3\cos(3x-1)$

d) $y'=\dfrac{-2\operatorname{sen} 2x\cdot x-\cos 2x}{x^2}=-\dfrac{2x\operatorname{sen} 2x+\cos 2x}{x^2}$

34. Deriva:

a) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; **b)** $y=\dfrac{1}{\cos x}$;

c) $y=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a) $y'=\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

b) $y'=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

c) $y'=\dfrac{-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x-\cos x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

35. a) $y=e^{2x}\operatorname{sen} 3x$;
b) $y=\cos e^x$;
c) $y=e^{\cos x}$

a) $y'=2e^{2x}\operatorname{sen} 3x+e^{2x}\cdot 3\cos 3x$

b) $y'=-e^x\operatorname{sen} e^x$

c) $y'=-\operatorname{sen} x e^{\cos x}$

36. a) $y=\operatorname{sen}(\ln x)$;
b) $y=\cos(\ln x)$
c) $y=\cos\dfrac{1}{x}$;
d) $y=\sqrt{\operatorname{sen} x}$

a) $y'=\dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$

b) $y'=-\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$

c) $y'=\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

d) $y'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

37. a) $y=\operatorname{tg}(x^2-1)$;
b) $y=\operatorname{tg}(x-1)^2$
c) $y=\operatorname{tg}^2(x-1)$

a) $y'=2x(1+\operatorname{tg}^2(x^2-1))=\dfrac{2x}{\cos^2(x^2-1)}$

b) $y'=2(x-1)(1+\operatorname{tg}^2(x-1)^2)=\dfrac{2(x-1)}{\cos^2(x-1)^2}$

c) $y'=2\operatorname{tg}(x-1)(1+\operatorname{tg}^2(x-1))$

38. a) $y=\operatorname{arcsen} 2x$;
b) $y=\arccos x^2$;
c) $y=\operatorname{arctg}(3x+2)$;
d) $y=\operatorname{arctg}(x)^2$

a) $y'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $y'=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

c) $y'=\dfrac{3}{1+(3x+3)^2}$

d) $y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$

Tipo IV. Variación de una función

39. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:
a) $f(x)=x^2+2x$
b) $f(x)=-x^2+2x$

a) $f'(x)=2x+2 \Rightarrow f'(x)=0$ si $x=-1$.
Si $x<-1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Si $x>-1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece.

b) $f'(x)=-2x+2 \Rightarrow f'(x)=0$ si $x=1$.
Si $x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ crece.
Si $x>1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ decrece.

40. Con la información obtenida indica el vértice de las parábolas anteriores. Represéntalas gráficamente.

a) $f(x)=x^2+2x$ tiene su vértice en el punto $V=(-1, -1)$.

Además es el mínimo de la parábola.
Dando algunos valores se obtiene la curva asociada.

x	−3	−2	−1	0	1
y	3	0	−1	0	3

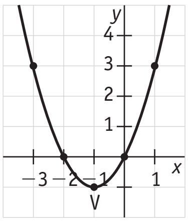


Fig. 16.8.

b) $f(x)=-x^2+2x$ tiene su vértice en el punto $V=(1, 1)$. Además es el máximo de la parábola.
Dando algunos valores se obtiene la curva asociada.

x	−1	0	1	2	3
y	−3	0	1	0	−3

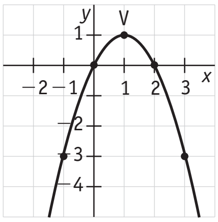


Fig. 16.9.

41. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:
a) $f(x)=x^3-3x^2+2$ b) $f(x)=-x^3+2x$

a) $f'(x)=3x^2-6x$
$3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$
Si $x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece.
Si $0<x<2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Si $x>2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece.
Crecimiento: $(-\infty, 0)\Rightarrow(2, +\infty)$
Decrecimiento: $(0, 2)$

b) $f'(x)=-x^2+2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$
Si $x<-\sqrt{2}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Si $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece.
Si $x>\sqrt{2}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Crecimiento: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Decrecimiento: $(-\infty, -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}, \infty)$

42. Con la información obtenida representa gráficamente las funciones anteriores.

a) La función $f(x)=x^3-3x^2+2$ crece ala izquierda de $x=0$ y decrece a su derecha. Por tanto tiene un máximo en $x=0$: punto $(0, 2)$.
Al decrecer a la izquierda de $x=2$ y crecer a su derecha, en $x=2$ hay un mínimo: punto $(2, 4)$.
Dando otros valores: $(-1, -2)$, $(1, 0)$, $(3, 2)$,... se obtiene la curva adjunta.

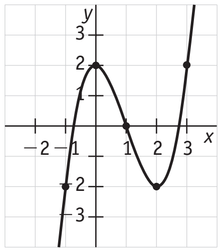


Fig. 16.10.

b) $f(x)=-x^3+2x$ tiene un mínimo en $x=-\sqrt{2}$ (a su izquierda decrece; a su derecha, crece) y un máximo en $x=\sqrt{2}$. Puntos $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}-4)$ y $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-4)$, respectivamente.
Otros pares de valores: $(-2, -18)$, $(-1, -2)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, -4)$

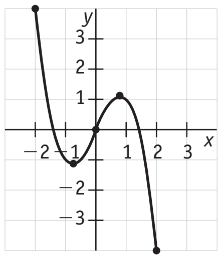


Fig. 16.11.

43. Considera la función f: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+5-2\operatorname{sen} x$.
Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$f'(x)=1-2\cos x \Rightarrow f'(x)=0$ si $1-2\cos x \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ o $x=\frac{5\pi}{3}$

- Si $0\leqslant x<\frac{\pi}{3}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $\frac{5\pi}{3}<x\leqslant 2\pi$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Intervalo de crecimiento: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

Intervalos de decrecimiento: $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$

44. Considera la función $f(x)=ax+\frac{1}{x}$. Determina los valores del parámetro a para los cuales la función es decreciente en el punto de abscisa $x=2$.

$f(x)=ax+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=a-\frac{1}{x^2}$
Es decreciente en $x=2$ cuando $f'(2)<0$:
$f'(2)=a-\frac{1}{4}<0 \Rightarrow a<\frac{1}{4}$
La función dada es decreciente en el punto de abscisa $x=2$ siempre que $a<\frac{1}{4}$.

Tipo V. Representación gráfica de funciones

45. Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=x^4-2x^3$ **b)** $f(x)=|x^2-4|$

c) $f(x)=x^3-5x^2+7x-3$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

a)

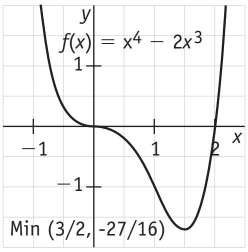


Fig. 16.12.

b)

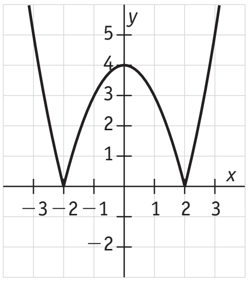


Fig. 16.13.

c)

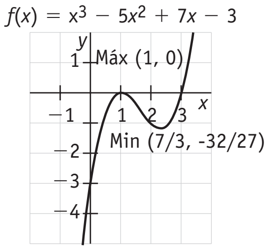


Fig. 16.14.

d)

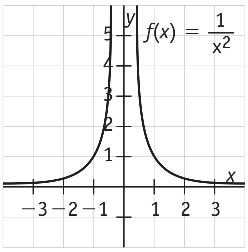


Fig. 16.15.

e)

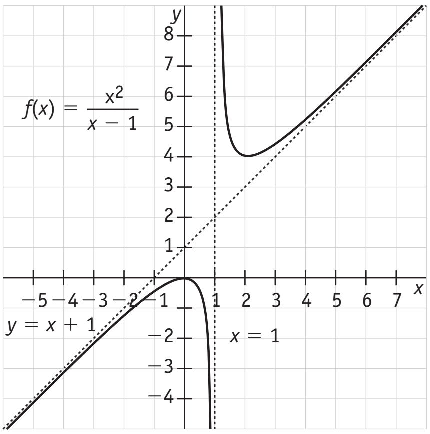


Fig. 16.16.

f)

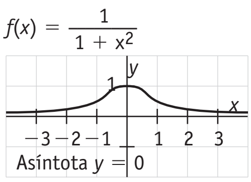


Fig. 16.17.

46. Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{-2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x}$

a)

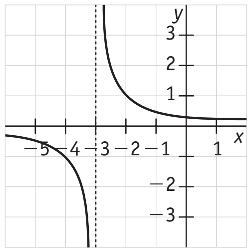


Fig. 16.18.

b)

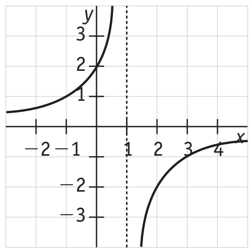


Fig. 16.19.

c)

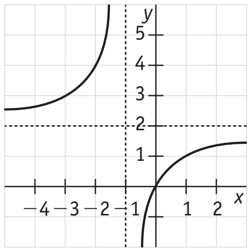


Fig. 16.20.

d)

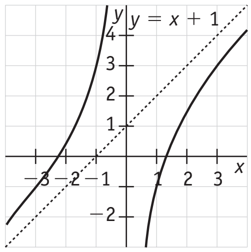


Fig. 16.21.

Tipo VI. Otras aplicaciones de las derivadas

47. Calcula el vértice de la parábola $f(x)=2x^2+4x-1$

En este caso el vértice es el mínimo $\Rightarrow f'(x)=4x+4=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=-1$.
Si $x=-1$, $f'(-1)=-3$.
El vértice es $V=(-1, -3)$.

48. Determina los puntos de la curva $y=x^4-x^3$ en los que su derivada vale 0. A partir de esos puntos halla sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$y'=4x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(4x-3)=0 \Rightarrow x=0,\ x=3/4$.
Si $x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Si $0<x<3/4$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece.
Si $x>3/4$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece.
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$ y $(0, 3/4)$
Intervalo de crecimiento: $(3/4, +\infty)$.
Nota: A ambos lados de $x=0$ la función decrece $\Rightarrow$ en $x=0$ hay un punto de inflexión.

49. Halla los coeficientes *a, b* y *c* de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que corta al eje *OY* en el punto (0, 4) y que la recta $y=x$ es tangente a ella en el punto (2, 2).

Pasa por $(0, 4) \Rightarrow f(0)=4 \Rightarrow 4=c$
Pasa por $(2, 2) \Rightarrow f(2)=2 \Rightarrow 2=4a+2b+c$
$(f'(x)=2ax+b)$ $f'(2)=1 \Rightarrow 1=4a+b$
$f(x)=x^2-3x+4$

50. ¿En qué punto de la curva $y=x^2-3x$ la recta $y=x-4$ es tangente a ella?

$y'=2x-3=1 \Rightarrow x=2$.
Si $x=2$, $y=-2$. El punto de tangencia será $(2, -2)$.

51. Dibuja la gráfica aproximada de $f(x)$ sabiendo que la de su derivada es:

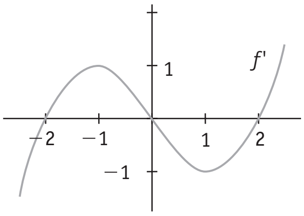


Fig. 16.22.

Además pasa por los puntos (−2, −2), (0, 1) y (2, 0).

Como $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \Rightarrow$ la fución decrece en esos intervalos.
Como $f'(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$ la fución crece en esos intervalos.
Como pasa por (−2, −2), (0, 1) y (2, 0) una posible gráfica para $f(x)$ es la siguiente.

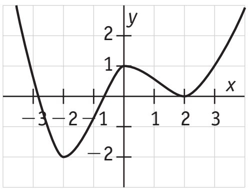


Fig. 16.23.

52. Dibuja la gráfica aproximada de $f'(x)$ sabiendo que la de $f(x)$ es:

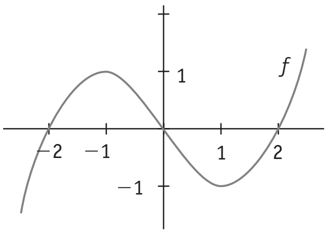


Fig. 16.24.

Como $f(x)$ crece en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ en esos intervalos.
Como $f(x)$ decrece en el intervalo $(-1, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$ en ese intervalo.
En $x = 0$ la funcion tiene un punto de inflexión $\Rightarrow f'(0) = 0$: en $x = 0$ la derivada toma un valor mínimo.
Una posible gráfica para $f(x)$ es la siguiente.

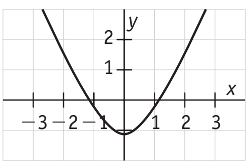


Fig. 16.25.

53. Halla los puntos de la curva $y = \dfrac{4}{x}$ en donde la tangente es perpendicular a la recta $y = x$.

Las rectas perpendiculares a $y = x$ tienen pendiente $m = -1$.
Por tanto, hay que buscar los puntos de la curva $y = \dfrac{4}{x}$ con derivada iguala a −1.

$y' = -\dfrac{4}{x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$.

Si $x = -2$, $y = -2$. Punto $P = (-2, -2)$.
Si $x = 2$, $y = 2$. Punto $Q = (2, 2)$.

54. Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros cuando han transcurrido t años, sigue la función: $f(t) = \dfrac{2t-4}{t+2}$

a) Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
b) ¿Es creciente la ganancia? ¿En qué año la ganancia supera los 100 000 €?
c) ¿Existe límite para la ganancia? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

a) Dejará de tener pérdidas cuando $f(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{2t-4}{t+2} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 2$.
Deja de tener pérdidas a partir del segundo año. (Después de dos años.)

b) $f'(t) = \dfrac{8}{(t+2)^2} > 0$ para cualquier valor de $t \Rightarrow$ la ganancia siempre es creciente.
Para una ganancia superior a 100 000 € $\Rightarrow f(t) > 1$
$\dfrac{2t-4}{t+2} > 1 \Rightarrow 2t - 4 > t + 2 \Rightarrow t > 6$
A partir del sexto año.

c) Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2t-4}{t+2} = 2$, la ganancia tiene un límite, que es de 200 000 €.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = -x^2 + 8x$ en el intervalo [1, 4].

$TVM[1,4] = \dfrac{f(4) - f(1)}{4-1} = \dfrac{16-7}{3} = 3$

2. Halla la derivada de $f(x) = -x^2 + 6x$. ¿Cuánto vale esa derivada en los puntos $x = 0$, $x = 3$ y $x = 4$?

$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(0) = 6;\ f'(3) = 0;\ f'(4) = -2$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = -x^2 + 6x$ en el punto de abscisa $x = 4$.

$y - f(4) = f'(4)(x-4) \Rightarrow\ y - 8 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x + 16$

4. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$. ¿Dónde está el vértice de esta parábola?

$f'(x)=4x-8 \Rightarrow f(x)=0$ en $x=4$.
Si $x<4$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ decrece
Si $x>4$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ crece
El vértice lo tiene en el máximo, en $x=4$. Punto (4, 1)

5. Las siguientes funciones no son derivables en los puntos $x=-1$ y $x=1$. ¿Por qué?

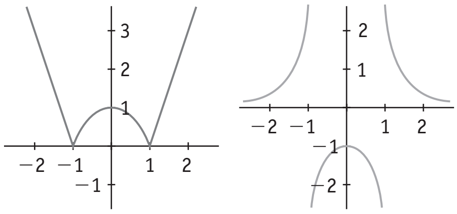


Fig. 16.26.

En la primera, la función tiene sendos picos.
En la segunda, no está definida.

6. Para esas mismas funciones, ¿en qué punto la derivada vale 0?

En $x=0$.

7. Calcula las derivadas de $f(x)=(5x^2-3x+6)^2$

$f'(x)=2(5x^2-3x+6)(10x-3)$

8. Deriva: $f(x)=\sqrt{x^3-5x}$

$f'(x)=\dfrac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x}}$

9. Deriva:
a) $f(x)=\ln\,(3x-2)$ b) $f(x)=x^2\cos x-2x\,\text{sen}\, x$

a) $f'(x)=\dfrac{3}{3x-2}$
b) $f'(x)=2x\cos x-x^2\,\text{sen}\, x-(2\,\text{sen}\, x-2x\cos x)=$
$=4x\cos x-x^2\,\text{sen}\, x-2\,\text{sen}\, x$

10. a) Aplica la fórmula de la derivada de $f(x)=\dfrac{4}{x}$, para calcular $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(20)$.
b) ¿Es creciente $f(x)$ en algún punto? ¿Por qué?

a) $f'(x)=-\dfrac{-4}{x^2}$:
- para $x=-2$, $f'(-2)=-\dfrac{-4}{(-2)^2}=-1$
- para $x=2$, $f'(2)=-\dfrac{4}{2^2}=-1$
- para $x=20$, $f'(20)=-\dfrac{4}{20^2}=-\dfrac{1}{100}$

b) $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}<0$, para todo x; en consecuencia, $f(x)=\dfrac{4}{x}$ es decreciente para todo punto de su dominio.

Actividades

1. Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-2x$ **b) $f(x)=1$**
c) $f(x)=6x^5$ **d) $f(x)=2x-3$**

a) $F(x)=-x^2$, pues $F'(x)=(-x^2)'=-2x$
b) $F(x)=x+3$, pues $(x+3)'=1$
c) $F(x)=x^6-2$, pues $F'(x)=6x^5$
d) $F(x)=x^2-3x$, pues $(x^2-3x)'=2x-3$

2. Halla las integrales siguientes:

a) $\int(-4x)dx$ **b) $\int 1dx=\int dx$**
c) $\int 7x^6dx$ **d) $\int 8dx$**

a) $\int(-4x)dx=-2x^2+c$

b) $\int 1dx=\int dx=x+c$

c) $\int 7x^6dx=x^7+c$

d) $\int 8dx=8x+c$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int(10x-6x^2)dx$ **b) $\int\frac{4x^3}{3}dx$**
c) $-6\int(x-2)dx$ **d) $\int\frac{x}{3}dx$**

a) $\int(10x-6x^2)dx=\int 10xdx-\int 6x^2dx=$
$=5\int 2xdx-2\int 3x^2dx=5x^2-2x^3+c$

b) $\int\frac{4x^3}{3}dx=\frac{1}{3}\int 4x^3dx=\frac{1}{3}x^4+c$

c) $-6\int(x-2)dx=-6\int xdx-6\int(-2)dx=$
$-3\int 2xdx+12\int dx=-3x^2+12x+c$

d) $\int\frac{x}{3}dx=\int\frac{2}{2}\cdot\frac{x}{3}dx=\int\frac{2x}{6}dx=\frac{1}{6}\int 2xdx=\frac{1}{6}x^2+c$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 0{,}7dx$ **b) $\int xdx$**
c) $\int(-2e^{-2x+1})dx$ **d) $\int\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}dx$**

a) $\int 0{,}7dx=0{,}7x+c$

b) $\int xdx=\frac{x^2}{2}+c$

c) $\int(-2e^{-2x+1})dx=e^{-2x+1}+c$

d) $\int\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}dx=\sqrt{3x-1}+c$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 2(3x-1)^2dx$ **b) $\int\frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx$**

a) $\int 2(3x-1)^2dx=\int 2(9x^2-6x+1)dx=\int(18x^2-12x+2)dx=$
$=6\int 3x^2dx-6\int 2xdx+\int 2dx=6x^3-6x^2+2x+c$

b) $\int\frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4}{\sqrt{4x+3}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{4}{2\sqrt{4x+3}}dx=$
$=\frac{1}{2}\sqrt{4x+3}+c$

6. Halla el área del recinto comprendido entre la curva $y=-x^2+5$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$.

El recinto es el sombreado en la figura adjunta.

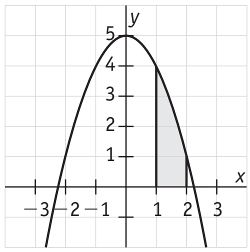


Fig. 17.1.

Su área vale,

$$\int_1^2(-x^2+5)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x\right)\Bigg|_1^2=\frac{22}{3}-\frac{14}{3}=\frac{8}{3}$$

Problemas propuestos

Tipo I. Integrales indefinidas

1. Comprueba en cada caso que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.
a) $F(x)=5x^2+2x-1\Rightarrow f(x)=10x+2$
b) $F(x)=-x^3+4\Rightarrow f(x)=-3x^2$
c) $F(x)=\cos^2x-x\Rightarrow f(x)=-2\cos x\cdot\text{sen }x-1$

Basta con derivar.

2. Da la función $f(x)$ de la que $F(x)=\sqrt{x^2+x}$ es una primitiva.

Su derivada: $f(x)=F'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Calcula las siguientes integrales:

3. a) $\int 4x^2dx$; **b) $\int 2x^3dx$;**
c) $2\int(x^2-1)dx$; **d) $\int(-4)dx$**

a) $\int 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3+c$

b) $\int 2x^3dx=\frac{2x^3}{3}+c$

c) $2\int(x^2-1)dx=2\int x^2dx-2\int dx=\frac{2x^3}{3}-2x+c$

d) $\int(-4)dx=-4x+c$

4. a) $\int(4x^2-3x+4)dx$; **b) $\int(2x^3-5)dx$;**

a) $\int(4x^2-3x+4)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+c$

b) $\int(2x^3-5)dx=\frac{x^4}{2}-5x+c$

5. a) $\int\frac{3x+4}{5}dx$; **b)** $\frac{1}{2}\int(x^2+2x-1)dx$

a) $\int\frac{3x+4}{5}dx=\frac{3}{10}x^2+\frac{4}{5}+c$

b) $\frac{1}{2}\int(x^2+2x-1)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$

6. a) $\int x^2(3x-5)dx$; **b)** $\int x(3x-5)^2dx$

a) $\int x^2(3x-5)dx=3\int x^3dx-5\int x^2dx=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+c$

b) $\int x(3x-5)^2dx=\int x(9x^2-30x+25)dx=$

$=9\int x^3dx-30\int x^2dx+25\int xdx=$

$=\frac{9}{4}x^4-10x^3+\frac{25}{2}x^2+c$

7. a) $\int\frac{-1}{x^2}dx$; **b)** $\int\frac{2}{x^3}dx$;

c) $\int\frac{-3}{x^4}dx$; **d)** $\int\frac{4}{x^5}dx$

a) $\int\frac{-1}{x^2}dx=\frac{1}{x}+c$

b) $\int\frac{2}{x^3}dx=-\frac{1}{x^2+c}$

c) $\int\frac{-3}{x^4}dx=\frac{1}{x^3}+c$

d) $\int\frac{4}{x^5}dx=-\frac{1}{x^4+c}$

8. a) $\int x\sqrt{x}dx$; **b)** $\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx$;

c) $\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx$

a) $\int x\sqrt{x}dx=\int x^{3/2}dx=\frac{2}{5}x^{5/2}+c$

b) $\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx=\int x^{-1/2}dx=2x^{1/2}+c$

c) $\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx=\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+c$

9. a) $\int\frac{3}{x}dx$; **b)** $\int\frac{3}{x-1}dx$;

c) $\int\frac{1}{2x-1}dx$; **d)** $\int\frac{3}{2x-1}dx$

a) $\int\frac{3}{x}dx=3\ln x+c$

b) $\int\frac{3}{x-1}dx=3\ln(x-1)+c$

c) $\int\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+c$

d) $\int\frac{3}{2x-1}dx=\frac{3}{2}\ln(2x-1)+c$

10. a) $\int\frac{3x+4}{x}dx$; **b)** $\int\frac{x^2-2x+1}{3x}dx$

a) $\int\frac{3x+4}{x}dx=\int\left(3+\frac{4}{x}\right)dx=3x+4\ln x+c$

b) $\int\frac{x^2-2x+1}{3x}dx=\int\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3x}\right)dx=$

$=\frac{x^2}{6}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\ln x+c$

11. Las siguientes integrales son inmediatas (pueden hacerse viendo la tabla). Obsérvalas con detenimiento escribe su resultado.

a) $\int(3+x)^4dx$; **b)** $\int(2x^3-1)^5\cdot 6x^2dx$

c) $\int\frac{2x}{x^2+6}dx$; **d)** $\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx$

a) $\int(3+x)^4dx=\frac{(3+x)^5}{5}+c$

b) $\int(2x^3-1)^5\cdot 6x^2dx=\frac{(2x^3-1)^6}{6}+c$

c) $\int\frac{2x}{x^2+6}dx=\ln\,(x^2+6)+c$

d) $\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx=\operatorname{sen}\sqrt{x}+c$

Calcula las siguientes integrales:

12. a) $18\int\frac{1}{3x+1}dx$; **b)** $\int\frac{x}{x^2+6}dx$;

c) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x}dx$

a) $18\int\frac{1}{3x+1}dx=6\cdot 3\int\frac{1}{3x+1}dx=6\int\frac{3}{3x+1}dx=$

$=6(\ln(3x+1)+c)=6\ln(3x+1)+c$

b) $\int\frac{x}{x^2+6}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+6}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+6)+c$

c) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x}dx=\ln(x^2-3x)+c$

13. a) $\int 6e^x dx$; **b)** $\int 6e^{3x}dx$;

c) $\int 4e^{3x}dx$; **d)** $\int 4e^{2x+3}dx$

a) $\int 6e^xdx=6e^x+c$

b) $\int 6e^{3x}dx=2e^{3x}+c$

c) $\int 4e^{3x}dx=\frac{4}{3}e^{3x}+c$

d) $\int 4e^{2x+3}dx=2e^{2x+3}+c$

14. a) $\int(2e^x-1)dx$; **b)** $\int(2e^{2x}+x)dx$;

c) $\int\frac{2e^{2x}+x}{3}dx$

a) $\int(2e^x-1)dx=2e^x-x+c$

b) $\int(2e^{2x}+x)dx=e^{2x}+\frac{x^2}{2}+c$

c) $\int\frac{2e^{2x}+x}{3}dx=\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}x^2+c$

15. a) $\int 2\cos x dx$; **b)** $\int\cos 2x\,dx$;

c) $\int(-5\cos 3x)dx$

a) $\int 2\cos xdx=2\operatorname{sen} x+c$

b) $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+c$

c) $\int(-5\cos 3x)dx=-\frac{5}{3}\operatorname{sen} 3x+c$

16. a) $\int 3\operatorname{sen} 3xdx$; **b)** $\int 2\operatorname{sen} 4xdx$;

c) $\int(-2\operatorname{sen} 5x)dx$; **d)** $\int\operatorname{sen}\frac{3}{2}xdx$

a) $\int 3\operatorname{sen} 3xdx=-\cos 3x+c$

b) $\int 2\operatorname{sen} 4xdx=-\frac{1}{2}\cos 4x+c$

c) $\int(-2\operatorname{sen} 5x)dx=\frac{2}{5}\cos 5x+c$

d) $\int\operatorname{sen}\frac{3}{2}xdx=-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x+c$

17. $\int(-3e^x+2\operatorname{sen} 2x-\cos 3x-2x)dx$

$\int(-3e^x+2\operatorname{sen} 2x-\cos 3x-2x)dx=$

$=-3e^x-\cos 2x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x-x^2+c$

18. a) $\int(2+2\operatorname{tg}^2x)dx$; **b)** $\int\frac{-1}{\cos^2x}dx$;

c) $\int\operatorname{tg} xdx$

a) $\int(2+2\operatorname{tg}^2 x)dx=2\int(1+\operatorname{tg}^2 x)dx=2\operatorname{tg} x+c$

b) $\int\frac{-1}{\cos^2 x}dx=-\operatorname{tg} x+c$

c) $\int\operatorname{tg} xdx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx=-\ln\cos x+c$

Tipo II. Integrales definidas

19. En los siguientes casos halla el área de la región sombreada (la parte curva es la gráfica de la función indicada en cada caso):

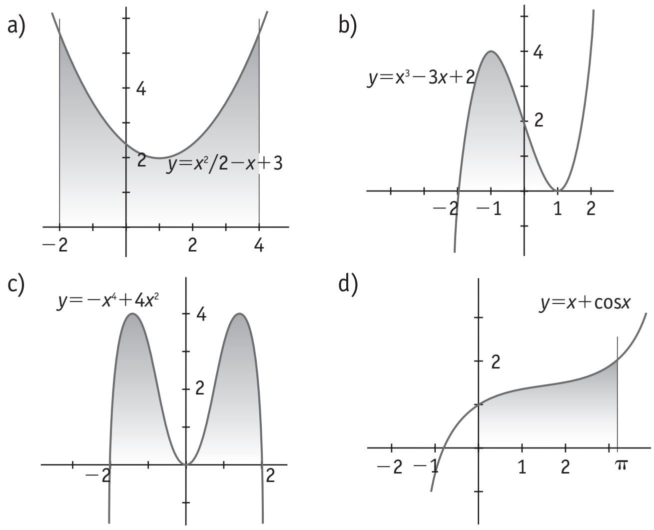


Fig. 17.2.

a) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{4}=\frac{44}{3}-\left(\frac{-28}{3}\right)=24$

b) $\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{3}{4}-(-6)=\frac{27}{4}$

c) $\int_{-2}^{2}(-x^4+4x^2)dx=\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{64}{15}-\left(\frac{-64}{15}\right)=\frac{128}{15}$

d) $\int_{0}^{\pi}(x+\cos x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\operatorname{sen} x\right)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$

En los siguientes problemas halla, dibujando la curva previamente, el área de la región:

20. Limitada por la curva $y=\frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=4$.

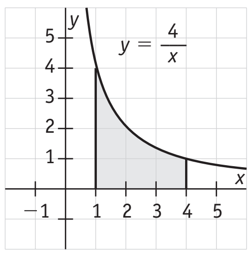


Fig. 17.3.

$S=\int_1^4\frac{4}{x}dx=4\ln x\Big|_1^4=4\ln 4$

21. Limitada por la curva $y=\frac{6x}{x^2+1}$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=4$. (Véase gráfica del ejemplo 8 de la unidad 16.)

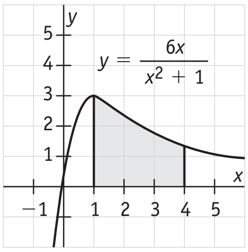


Fig. 17.4.

$$S=\int_{1}^{4}\frac{6x}{x^2+1}dx=3\ln(x^2+1)\Big|_1^4=3(\ln 17-\ln 2)=3\ln(17/2)$$

22. Limitada por la curva $y=+\sqrt{x}$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=4$.

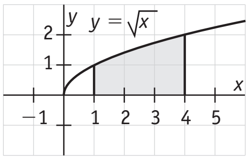


Fig. 17.5.

$$S=\int_{1}^{4}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=\frac{14}{3}$$

23. Limitada por la curva $y=\dfrac{x^3}{3}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=3$.

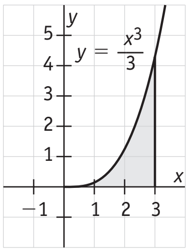


Fig. 17.6.

$$\int_0^3\frac{x^3}{3}dx=\frac{x^4}{12}\Big|_0^3=\frac{27}{4}$$

24. Limitada por la curva $y=x^2$, el eje OX y las rectas $x=-2$ y $x=2$.

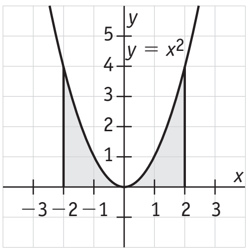


Fig. 17.7.

$$\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$$

25. Limitada por la curva $y=x^2+1$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

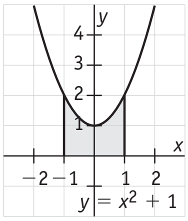


Fig. 17.8.

$$\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

26. Limitada por la curva $y=e^x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

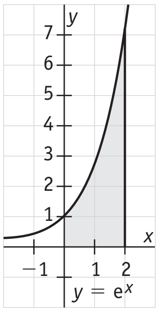


Fig. 17.9.

$$\int_0^2 e^x dx=e^x\Big|_0^2=e^2-1$$

27. Limitada por la curva $y=\text{sen}\,x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

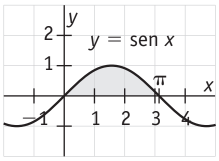


Fig. 17.10.

$$\int_0^{\pi}\text{sen}\,x dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\cos(\pi)-(-\cos 0)=2$$

28. Limitada por la curva $y=2+\cos x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

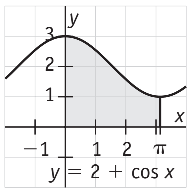


Fig. 17.11.

$$\int_0^{\pi}(2+\cos x)dx=(2x+\text{sen}\,x)\Big|_0^{\pi}=2\pi$$

29. Halla el área comprendida entre la curva $y=-x^2+5x$ y el eje OX.

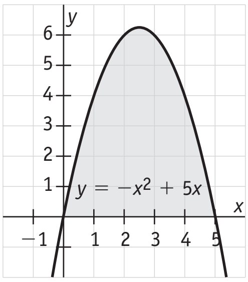


Fig. 17.12.

$$\int_0^5 (x^2+5)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5=\frac{125}{6}$$

30. Halla el área comprendida entre la curva $y=x^2-4x+4$ y los ejes de coordenadas.

La curva $y=x^2-4x+4$ corta al eje OX en $x=2$.

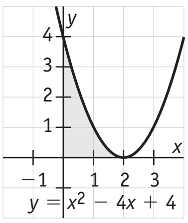


Fig. 17.13.

$$\int_0^2 (-x^2-4x+4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}$$

31. Halla el área comprendida entre la curva $y=x^3-4x^2+4x$ y el eje OX.

La curva $y=x^3-4x^2+4x$ corta al eje OX en $x=0$ y $x=2$.

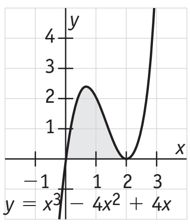


Fig. 17.14.

$$\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}$$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Escribe dos primitivas de $f(x)=7$.

$7x+1$
$7x-3$

2. ¿De cuál de las siguientes funciones es $F(x)=\ln(x^2+x)+1$ una primitiva?:

a) $f_1(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; **b)** $f_2(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$;

c) $f_1(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

c) $f_1(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

3. ¿Por qué $F(x)=3x^2-2x$ no es una primitiva de $f(x)=x^3-x^2$?

$F'(x)=6x-2\neq f(x)$ (Sería al revés: $f(x)$ es una primitiva de $F(x)$.)

4. Halla las siguientes integrales:

a) $\int(2x-3)dx$; **b)** $\int\frac{1}{5}\,dx$

a) $\int(2x-3)dx=x^2-3x+c$ b) $\int\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}x+c$

5. Calcula:

a) $\int\frac{2x}{x^2+1}dx$; **b)** $\int 5e^x dx$

a) $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+c$ b) $\int 5e^x dx=5e^x+c$

6. Halla:

a) $\int(-5\text{sen } x)dx$; **b)** $\int\frac{\cos x}{3}dx$

a) $\int(-5\text{sen } x)dx=5\cos x+c$

b) $\int\frac{\cos x}{3}dx=\frac{1}{3}\text{sen } x+c$

7. Calcula el valor de $\int_1^3(-x+4)dx$

$$\int_1^3(-x+4)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^3=7{,}5-3{,}5=4$$

8. Halla el área del recinto limitado por la recta $y=\frac{1}{2}x+2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=3$.

$$\int_{-1}^3\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Bigg|_{-1}^3=\frac{33}{4}+\frac{7}{4}=10$$

9. ¿Cuánto vale la superficie sombreada? (Utiliza los resultados del problema resuelto n.º 7b.)

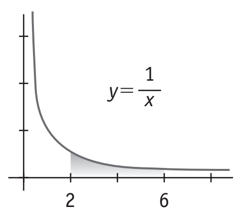


Fig. 17.15.

$$\int_2^6 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$$

10. Halla el área comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 1$ y el eje OX.

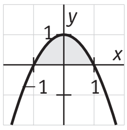


Fig. 17.16.

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

2 cuestiones para investigar

2. La integral definida puede utilizarse también para calcular el área comprendida entre dos curvas. Observa la siguiente secuencia de figuras.

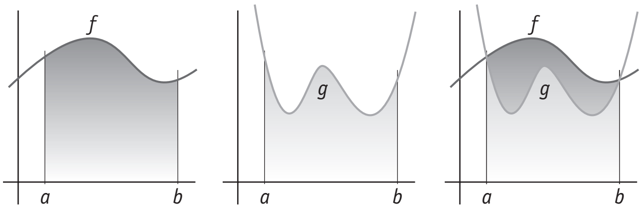


Fig. 17.17.

Si has captado la idea aplícala para calcular la superficie comprendida entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.
(Si no has captado la idea, vuelve a mirar las figuras.)
(Si sigues sin captarla, pregúntale a tu profesor o profesora.)

La región es la sombreada en la figura adjunta.

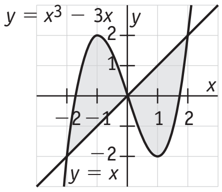


Fig. 17.16.

$$S = \int_{-2}^{0}(x^3-3x)dx - \int_{-2}^{0}xdx + \int_{0}^{2}xdx - \int_{0}^{2}(x^3-3x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} = 8$$

Actividades

1. Ocho alumnos, tomados al azar, teclean 40 líneas de texto en un ordenador. El tiempo empleado, en minutos, y el número de errores cometidos, fueron:

Tiempo (X)	9	10	12	13	15	15	22	25
Errores (Y)	18	20	30	15	21	10	32	20

a) ¿Existe correlación entre los datos?
b) Da una explicación de las diferencias respecto al ejercicio anterior.

a) La nube de puntos asociada sugiere una correlación lineal muy débil.

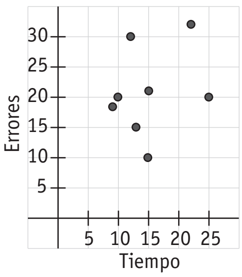


Fig. 18.1.

b) En el Ejemplo 1, las 8 personas tenían una destreza similar; por tanto, a más tiempo, menos errores. Aquí, los 8 alumnos han sido elegidos al azar.

2. Halla el coeficiente de correlación de la distribución dada por la siguiente tabla:

X	4	7	3	9
Y	3	6	7	5

$\bar{x}=5{,}75$; $s_x = 2{,}385$
$\bar{y}=5{,}25$; $s_y = 1{,}479$
$s_{xy} = -0{,}188$ $r = -0{,}053$

3. a) Halla la recta que mejor se ajuste a los datos:

X	1	3	4	5	6
Y	3	4	6	6	8

b) Mediante esa recta, estima el valor de Y para $x = 2$ y $x = 7$.

a) $y=1{,}7027+0{,}972973x$; $r = 0{,}96$
b) 3,648 y 8,5135

4. En una población, la media de los pesos de sus habitantes es de 65 kg y la de las estaturas 170 cm, siendo sus desviaciones típicas de 5 kg y 10 cm, respectivamente. Se sabe además que el coeficiente de correlación lineal entre ambas variables es de 0,8.
a) Halla las dos rectas de regresión.
b) ¿Cuánto se estima que pesará un individuo que mide 180 cm? ¿Qué altura corresponde a un peso de 75 kg?

a) Como sabemos: $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$, siendo s_{xy} la covarianza y s_x y s_y las desviaciones típicas de la variable X (peso) e Y (estatura).
De $r = 0{,}8$, $s_x = 5$ y $s_y = 10$, se tiene $0{,}8=\frac{s_{xy}}{5\cdot 10} \Rightarrow s_{xy}=40$.
Las ecuaciones de las rectas de regresión son:
de Y sobre X: $Y - 170 = 1{,}6(X - 65)$
de X sobre Y: $X - 65 = 0{,}4(Y - 170)$
b) Para $Y = 180$, empleando la recta de regresión de X sobre Y, se obtiene, $X = 69$ kg.
Para $X = 75$, con la recta de regresión de Y sobre X, se obtiene $Y = 186$ cm.

Problemas propuestos

Tipo I. Correlación a partir de nubes de puntos

1. El número de españoles ocupados (en millones) en la agricultura, para los años que se indican, era:

Año	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Ocupados	2,1	2,04	1,96	1,74	1,69	1,49	1,25	1,16

a) ¿Podría explicarse su evolución mediante una recta de regresión?
b) ¿Qué limitaciones tendrían las estimaciones hechas por esa recta?

a) Sí, pues la nube de puntos se ajusta bien a una recta

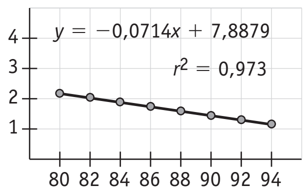


Fig. 18.2.

b) Esta recta de regresión no sería válida para hacer estimaciones alejadas de los años considerados. Por ejemplo, para el año 2 011 obtendríamos −0,0341 millones de ocupados en la agricultura; cifra que carece de sentido.
(La recta de regresión es $Y = -0{,}071369(X - 1980) + 2{,}17833$. El coeficiente de correlación lineal vale $r = -0{,}986392$.)

2. El departamento de control de calidad de una empresa de instalación de componentes electrónicos desea determinar la relación entre las semanas de experiencia de sus trabajadores (X) y el número de componentes rechazados (Y) a esos trabajadores la semana anterior.

Trabajador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Exper. (X)	7	8	10	1	4	5	15	18	4	8
Recha. (Y)	22	35	15	42	26	30	16	20	31	23

a) Representa el diagrama de dispersión asociado a esos datos. ¿Sugiere la gráfica alguna asociación lineal?
b) ¿Cómo calificarías la correlación?

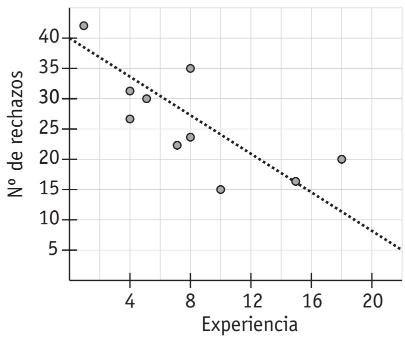
a)


Fig. 18.3.

Podrá ajustarse la recta de trazos.

b) Salvo para la persona *B*, la correlación parece fuerte e inversa.

3. Dos conjuntos de datos bidimensionales tienen como coeficientes de correlación $r = -0{,}83$, $r = 0{,}51$.

a) Representa gráficamente dos conjuntos de puntos cuyas correlaciones reflejen aproximadamente las dadas.

b) Razona cuál de los dos conjuntos estará más concentrado respecto a sus correspondientes rectas de regresión.

a) Por ejemplo:

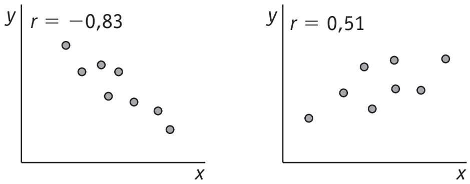


Fig. 18.4.

b) La concentración será mayor cuando la correlación sea más fuerte, y esto sucede cuando $r = -0{,}83$.

4. Asocia las rectas de regresión $y = -x + 16$, $y = 2x - 12$, $y = 0{,}5x + 5$ a las nubes de puntos siguientes:

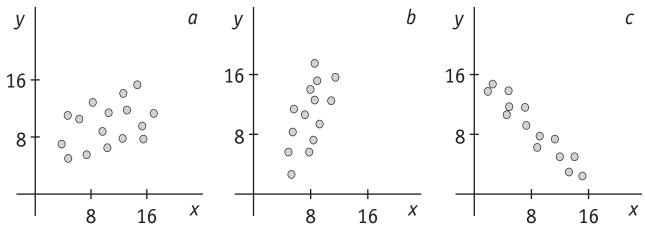


Fig. 18.5.

$y = -x + 16 \rightarrow$ (c);

$y = 2x - 12 \rightarrow$(b);

$y = 0{,}5x + 5 \rightarrow$ (a).

5. Asigna los coeficientes de correlación lineal $r = 0{,}4$, $r = -0{,}85$ y $r = 0{,}7$, a las nubes de puntos del problema anterior.

a) $\rightarrow$ 0,4; b) $\rightarrow$ 0,7;

c) $\rightarrow$ −0,85

6. En el año 1995, la renta per cápita por habitante y la esperanza de vida para la mujer, en seis países, se da en la siguiente tabla:

Renta (miles de $)	11,7	0,6	2,4	1,7	3,1	10
Esperanza de vida	75	54	70	55	70	72

a) Representa la nube de puntos asociada.

b) ¿Qué tipo de correlación observas? ¿Piensas que es lineal? (Te damos otros puntos para que contrastes tu opinión: (1,5, 72), (15,7, 79), (0,9, 61), (8,5, 75)).

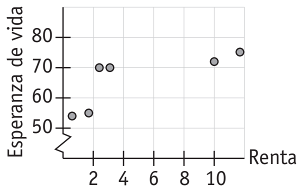
a)


Fig. 18.6.

b) Con los puntos dados inicialmente podría suponerse que la correlación es lineal; de hecho, $r = 0{,}7547$. No obstante, la correlación adecuada es exponencial (o logarítmica) aunque con los nuevos datos no termine de verse claro. Piénsese que para países con esperanza de vida muy baja, un mínimo incremento en la renta produce notables aumentos en la esperanza de vida, mientras que para países con vida media muy alta es muy difícil aumentarla. La relación renta–esperanza de vida se ajustaría a una curva como la siguiente.

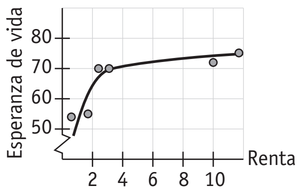


Fig. 18.7.

7. Se han tomado ocho medidas de la temperatura (*X*) de una batería y de su voltaje (*Y*), y se obtuvieron los siguientes datos:

X	10,0	10,0	23,1	23,5	34,0	34,5	45,0	45,6
Y	430	425	450	460	470	480	495	510

a) Sin efectuar cálculos, razona cuál de las siguientes rectas es la recta de regresión de *Y* sobre *X* para los datos anteriores:

$y = 350 - 2{,}1x$; $y = 460 - 2{,}1x$; $y = 406 + 2{,}1x$

b) Para 25 grados, ¿qué voltaje sería razonable suponer?

a) Puede observarse que al aumentar la temperatura también lo hace el voltaje; por tanto, la correlación es positiva. Como el signo de la correlación es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión, la única recta posible es $y = 406 + 2{,}1x$.

b) Para esa ecuación, si $x = 25$ se tiene $y = 406 + 2{,}1 \cdot 25 = 458{,}5$.

8. Demuestra que las dos fórmulas dadas para la covarianza son equivalentes.

Operando en $s_{xy}=\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}$ se tiene:

$$s_{xy}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}=\frac{\sum(x_iy_i-\bar{x}y_i-x_i\bar{y}+\bar{x}\bar{y})}{n}=$$

$$=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\frac{\sum\bar{x}y_i}{n}-\frac{\sum x_i\bar{y}}{n}+\frac{\sum\overline{xy}}{n}=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\bar{x}\frac{\sum y_i}{n}-\bar{y}\frac{\sum x_i}{n}+\frac{n\overline{xy}}{n}=$$

$$=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\overline{xy}-\overline{yx}+\overline{xy}=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\overline{xy}$$

Que es la segunda expresión de la covarianza.

Tipo II. Cálculo de la correlación y regresión

9. ¿Qué se entiende por correlación entre variables? ¿Qué es el coeficiente de correlación lineal? ¿Qué valores puede tomar ese coeficiente? Si el coeficiente de correlación es cero, ¿Cómo son las variables?

Ver parte teórica.

10. Para los datos del problema 2, halla con ayuda de la calculadora:
a) Las medias y desviaciones típicas marginales.
b) La covarianza.
c) El coeficiente de correlación lineal.
d) La recta de regresión de *Y* sobre *X*.
e) El número de rechazos que hay que esperar para una persona con 20 semanas de experiencia.

Sumas:
$\sum x_i=80$; $\sum y_i=260$; $\sum x_i^2=884$; $\sum y_i^2=7\,420$; $\sum x_iy_i=1\,788$

a) $\bar{x}=8$; $s_x=4{,}93963$;
$\bar{y}=26$; $s_y=8{,}12403$

b) $s_{xy}=178{,}8-8\cdot 26=-29{,}2$

c) $r=-29{,}2/(4{,}93963\cdot 8{,}12403)=-0{,}72763$

d) $y=-1{,}19672x+35{,}5737$

e) 11,6, que aproximamos a 12.

11. a) Calcula la recta de regresión de *Y* sobre *X* en la distribución siguiente realizando todos los cálculos intermedios.

X	10	7	5	3	0
Y	2	4	6	8	10

b) ¿Cuál es el valor que correspondería según dicha recta a *X* = 7?

a) Formamos la tabla:

X	*Y*	X^2	Y^2	$X\cdot Y$
10	2	100	4	20
7	4	49	16	28
5	6	25	36	30
3	8	9	64	24
0	10	0	100	0
$\Sigma X_i=25$	$\Sigma Y_i=30$	$\Sigma X_i^2=183$	$\Sigma Y_i^2=220$	$\Sigma X_iY_i=102$

Se obtiene.

$\bar{x}=5$; $s_x^2=\dfrac{183}{5}-5^2=11{,}6$;

$\bar{y}=6$; $s_{xy}=\dfrac{102}{5}-5\cdot 6=-9{,}6$

La ecuación de la recta de regresión es

$y-\bar{y}=\dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\bar{x})\Rightarrow y=-0{,}8276x+10{,}138$

b) Si $X=7\Rightarrow Y=4{,}3448$.

12. La siguiente tabla ofrece los resultados de seis pares de observaciones realizadas para analizar el grado de relación entre las variables *X* e *Y*.

X	2	2	3	3	3	4
Y	0	1	1	2	4	3

a) Representa los pares de datos. ¿Se observa correlación lineal entre ellos?
b) Halla el coeficiente de correlación lineal y coméntalo.
c) Halla y representa la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Hay garantías de que esa recta pueda utilizarse para estimar *Y* a partir de *X*?

a)

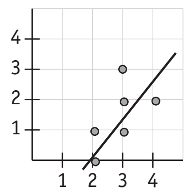


Fig. 18.8.

Posiblemente sí, pero pienso que se necesitarían más datos.

b) $r=0{,}6919$; su valor es grande, pues explica casi el 50 % de la variación de una variable a partir de la otra.

c) $y=1{,}35x\,29x-2$. Las garantías son casi de un 50 %.

13. El número de bacterias por unidad de volumen, presentes en un cultivo después de un cierto número de horas, viene expresado en la siguiente tabla:

***X*: N.º de horas**	0	1	2	3	4	5
***Y*: N.º de bacterias**	12	19	23	34	56	62

Calcula:
a) Las medias y desviaciones típicas de las variables, número de horas y número de bacterias.
b) La covarianza de la variable bidimensional.
c) El coeficiente de correlación e interpretación.
d) La recta de regresión de *Y* sobre *X*.

$\sum x_i=15$; $\sum y_i=206$; $\sum x_i^2=55$; $\sum y_i^2=9\,170$; $\sum x_iy_i=701$

a) $\bar{x}=2{,}5$; $s_x=1{,}70782$; $\bar{y}=34{,}3333$; $s_y=18{,}6964$

b) $s_{xy}=31$

c) $r=0{,}97086$

d) $y=10{,}6285x+7{,}7619$

14. Se está experimentado la resistencia a la rotura de una determinad fibra textil. Para ello se ha medido el diámetro de la fibra y el peso que soporta hasta la rotura, obteniéndose los siguientes datos:

Diámetro en mm (X)	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Peso en kg (Y)	12,5	18	25	32	41	52

a) Representa el diagrama de dispersión asociado a esos datos. ¿Sugiere la gráfica alguna asociación lineal?
b) ¿Cómo calificarías la correlación?

a)

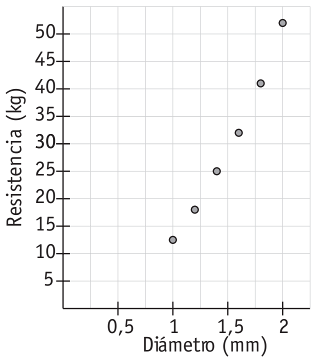


Fig. 18.9.

Claramente se adivina una correlación lineal
b) Positiva y muy fuerte.

15. Con los datos del problema anterior, halla:
a) La recta de regresión de Y sobre X y determina la resistencia a la rotura de una fibra de 2,5 mm de diámetro.
b) La recta de regresión de X sobre Y y determina el diámetro mínimo de una fibra para que soporte más de 60 kg.

Utilizando la calculadora:
a) $Y = 39{,}0714 \cdot X - 28{,}5238$. Para $X = 2{,}5$ mm, $Y = 69{,}1547$ kg
b) $X = 0{,}02522 \cdot Y + 0{,}74112$. Para $Y = 60$ kg, $X = 2{,}25$ mm

16. Se ha medido la temperatura (en °C) y la presión atmosférica (en mm) en una ciudad, a la misma hora de siete días seguidos. Los datos fueron:

Temperatura	15	16	17	20	18	16	12
Presión	800	810	800	820	810	780	750

a) Representa estos valores en forma de nube de puntos.
b) De la representación anterior se puede deducir el tipo de dependencia que hay entre la temperatura y la presión?
c) Calcula el coeficiente de correlación.
d) Halla la recta de regresión de presión sobre temperatura.

a)

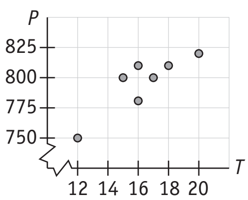


Fig. 18.10.

b) Directa.
c) $r = 0{,}868655$
d) Presión $= 661{,}45 + 8{,}244 \cdot$ Temperatura.
d) Si x es la temperatura e y la presión, la recta es:
$y = 661{,}45 + 8{,}244x$.

17. La temperatura media anual, en °C, de varias ciudades, y el gasto medio anual en calefacción por habitante (en euros) fue:

Temperatura	10	12	15	16	18	22
Gasto	250	200	140	100	80	20

a) Representa la nube de puntos asociada. ¿Qué correlación observas? ¿Es fuerte?
b) Halla el coeficiente de correlación y la recta de regresión del gasto sobre la temperatura.
c) ¿Qué gasto cabe esperar en ciudades con temperatura media de 8, 17 y 26 °C? ¿Te parece lógico el resultado?

a)

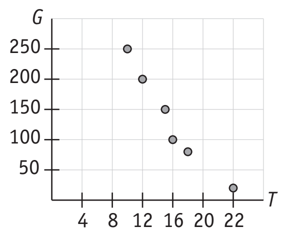


Fig. 18.11.

Es inversa y muy fuerte.
b) $r = -0{,}98792$
$G = 430{,}655 - 19{,}2896T$
c) $G(8) = 276{,}34$ €; $G(17) = 102{,}73$ €; $G(26) = -70{,}87$ €.
Los dos primeros resultados son lógicos. El tercer valor es un disparate: por encima de una determinada temperatura el gasto en calefacción suele ser nulo, pero nunca negativo.

18. La altura (en cm), el peso y el número de zapato que usan ocho alumnas de primero de bachillerato se dan en la siguiente tabla:

Altura	164	158	162	166	168	172	174	170
Peso	52	55	53	50	51	56	52	53
Zapato	37	37	36	38	39	40	41	40

a) Representa las nubes de puntos asociadas a los pares de variables altura/peso y altura/zapato. ¿Qué correlación observas?
b) Halla el coeficiente de correlación en cada uno de los casos.

a)

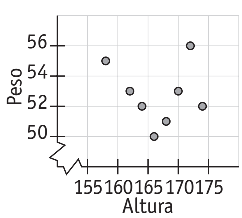


Fig. 18.12.

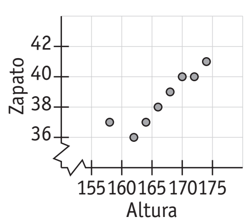


Fig. 18.13.

En el primer caso no se observa correlación. En el segundo, la correlación es directa y fuerte.

b) Altura–peso: $r = -0{,}0877557$.
Altura–zapato: $r = 0{,}920761$.
Nota: Para chicas jóvenes, en contra de lo que muchos suponen, no existe correlación clara entre la altura y el peso. En diversos muestreos, con alumnas entre 16 y 20 años, hemos obtenido valores de r muy próximos a cero, tanto positivos como negativos.

19. Los gastos de inversión (X), en miles euros, en la modernización de equipos informáticos y el porcentaje de incremento de beneficios (Y) de diez empresas de similares características, fueron:

X	3	3,5	8	11	2,5	8	6,5	5	15	7,5
Y	3	4	10	8	6	9	7	5	12	7

Halla la recta de regresión del incremento de beneficios sobre la inversión.

Sean Y = incremento de beneficio; X = inversión.
Se obtiene: $Y = 2{,}74444 + 0{,}00062222 \cdot X$

20. En una población la media de los pesos es de 70 kg y la de las estaturas 175 cm. Las desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm, respectivamente y la covarianza de ambas variables es 40.
a) Estima el peso de una persona de esa población que mide 185 cm de estatura.
b) Usando el coeficiente de correlación lineal, explica hasta qué punto confía usted en la estimación que ha hecho en el apartado a).

a) Hay que hallar la recta de regresión del peso sobre la estatura. Su ecuación es:

$$y-70=\frac{40}{100}(x-175) \Rightarrow y-70=0{,}4(x-175)$$

Para una estatura de $x = 185$ cm, el peso esperado es $y = 74$ kg.

b) El coeficiente de correlación vale $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} \Rightarrow r=\dfrac{40}{50\cdot 10}=0{,}8$

Este valor de r indica que la correlación es directa y fuerte.
Una idea más cuantitativa la da el coeficiente de determinación que es $r^2 = 0{,}64$, que indica que el 64 % de las variaciones observadas en la Y (el peso) son consecuencia de las variaciones de la X (la estatura).

21. Cien alumnos prepararon un examen de matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron: $\bar{x}=9{,}2$ e $\bar{y}=7{,}5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x, se pide obtener, razonadamente:
a) Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y.
b) La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen.

Datos:
X = número de problemas hecho; $\bar{x}=9{,}2$; s_x desconocida
Y = calificación obtenida; $\bar{y}=7{,}5$, s_y desconocida, pero $s_y=2s_x$

a) Coeficiente de correlación $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=0{,}7 \Rightarrow$ (por $s_y=2s_x$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0{,}7=\frac{s_{xy}}{s_x^2} \Rightarrow s_{xy}=2\cdot 0{,}7 s_x^2$$

$$\Rightarrow 0{,}7=\frac{s_{xy}}{s_y^2/2} \Rightarrow s_{xy}=\frac{0{,}7 s_y^2}{2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\bar{x}) \Rightarrow y-7{,}5=2\cdot 0{,}7(x-9{,}2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1{,}4x-5{,}38$$

$$x-\bar{x}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}(y-\bar{y}) \Rightarrow x-9{,}2=\frac{0{,}7}{2}(y-7{,}5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0{,}35y+6{,}575$$

b) Si un alumno hizo 6 problemas su calificación esperada será:
$y=1{,}4\cdot 6-5{,}38=3{,}02$

22. La tabla adjunta muestra las calificaciones de ocho alumnos en la asignatura de Lengua en la primera y segunda evaluación:

1.ª Evaluación (X)	6	3	4	8	8	7	5	6
2.ª Evaluación (Y)	7	5	4	7	8	9	3	5

a) Representa la nube de puntos.
b) ¿Dirías que la correlación es fuerte?
c) Traza a ojo la recta que más se ajusta a esos puntos.

a)

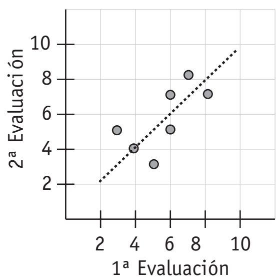


Fig. 18.14.

b) Existe correlación lineal, aunque parece moderada.
c) Es la línea de trazos

23. Para los datos del problema anterior halla las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y. ¿Son iguales?

De Y sobre X: $y = 0{,}83x + 1{,}12$
De X sobre Y: $x = 0{,}63y + 2{,}075$
No son iguales. Puede verse que despejando x en la primera se tiene $x = 1{,}2y - 1{,}35$.
Tiene en común el centro medio de la distribución (5,875, 6).

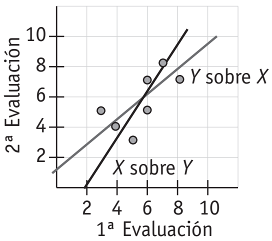


Fig. 18.15.

Tipo III. Estimación a partir de la recta de regresión. Aplicaciones

24. La altura, en cm, de 8 padres y del mayor de sus hijos varones, son:

Padre	170	173	178	167	171	169	184	175
Hijo	172	177	175	170	178	169	180	187

a) Calcula la recta de regresión que permita estimar la altura de los hijos dependiendo de la del padre; y la del padre conociendo la del hijo.
b) ¿Qué altura cabría esperar para un hijo si su padre mide 174? ¿Y para un padre, si su hijo mide 190 cm?

a) Hijo = 68,1853 + 0,621859 · Padre.
Padre = 77,4406 + 0,545082 · Hijo.
Si X indica la atura del padre e Y la del hijo, se tendría:
$Y = 68{,}1853 + 0{,}621859 \cdot X$;
$X = 77{,}4406 + 0{,}545082 \cdot Y$.
b) 176,4 para el hijo; 181 para el padre.

25. Los años de 7 árboles y el diámetro de su tronco, en cm, se dan en la siguiente tabla:

Años	2	4	5	8	10	14	20
Diámetro	10	15	17	20	23	25	27

a) Calcula, utilizando la recta de regresión, el diámetro que se puede predecir para árboles de 10 y 20 años.
b) Compara el resultado anterior con los valores observados en la tabla. Razona el porqué de las diferencias.

a) X = años; Y = diámetro.
$\bar{x}=9$; $s_x = 5{,}83$; $\bar{y}=19{,}57$; $s_y = 5{,}55$; $r = 0{,}93563$
$y = 11{,}55 + 0{,}89 \cdot x$.
b) $Y(10) = 20{,}45$; $Y(20) = 29{,}35$.
Las diferencias son debidas a que la recta de regresión da una media del valor esperado.

26. Durante su primer año de vida han pesado a Marta cada mes. En la tabla siguiente se dan sus pesos:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	3,2	3,7	4,2	5,3	5,7	6,5	6,8	7,2	7,9	7,7	8	8,5

En esta tabla, *x* representa la edad en meses e *y* el peso en kilogramos.

a) Calcula la media y la desviación típica de los pesos.
b) Determina la ecuación de la recta de regresión de y sobre *x*, explicando detalladamente los cálculos que haces y las fórmulas que utilizas.

a) $\bar{y}=6{,}225$, $s_y=1{,}7181$
b) $y = 0{,}48706x + 3{,}05909$
Otros resultados: $r = 0{,}97861$; $\bar{x}=6{,}5$; $s_x=3{,}45205$

27. Utilizando la recta de regresión de *x* sobre y correspondiente a la distribución siguiente:

X = altitud (m)	0	184	231	481	911
y = temperatura (°C)	20	18	17	12	10

Calcula la altitud de una ciudad en la que la temperatura media es de 15º.

Hay que calcular la recta de regresión de x sobre y:
$x-\bar{x}=\dfrac{s_{xy}}{s_y^{\,2}}=(y-\bar{y})$
Con la calculadora se obtiene: $x = 1\,595{,}7 - 80{,}2y$
Para $y = 15º$, $x = 392{,}7$ metros.
(Otros parámetros: $\bar{x}= 361{,}4$; $\bar{y} = 15{,}4$; $s_x = 314{,}8$; $s_y = 3{,}77$)

28. Se toman siete individuos al azar y se mide la concentración de una determinada sustancia en sangre venosa (*X*) y arterial (*Y*), obteniéndose:

X	2	1	7	5	4	3	6
Y	2	1	10	6	5	3	8

a) ¿Qué ecuación lineal nos permite estimar, para cada individuo, su concentración arterial sabiendo la venosa?
b) ¿Qué valor arterial estimaríamos para un individuo con venosa 5?

a) La recta de regresión de Y sobre X, que es: $y = 1{,}5x - 1$.
b) $y(5) = 6{,}5$

29. La tabla adjunta da los rendimientos (*Y*, en toneladas) de 10 parcelas han sido tratadas con diversas cantidades de fertilizante (*X*, en kg):

X	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Y	2,9	3,2	3,1	3,8	3,5	4,2	5,1	4,8	5,3	5,2

a) Halla la recta que nos permita predecir los rendimientos de una parcela en función de los kg de fertilizantes utilizados.
b) ¿Qué rendimiento cabe esperar si se utilizan 95 kg de fertilizante?

a) $Y = 0{,}02939X + 1{,}90545$
b) $Y(95) = 4\,697{,}5$ kg

30. Se quiere construir una escuela a la que acudan los niños y niñas de 6 pequeños núcleos de población de una comarca.

La posición sobre el plano y el número de niños de cada pueblo se dan en la tabla:

Pueblo	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Niños	30	15	10	35	8	5
Posición	(3, 4)	(2, 5)	(5, 4)	(2, 2)	(6, 6)	(9, 4)

a) Determina el pueblo más adecuado para construir la escuela, sin tener en cuenta el número de niños.
b) Haz lo mismo teniendo en cuenta su número.

a) Las coordenadas del centro medio son $\bar{x} = 4{,}5$, $\bar{y} = 4{,}17$.
El pueblo más cercano a ese punto es *C*.
b) Las coordenadas del centro medio ponderado son: $\bar{x}_p = 3{,}23$, $\bar{y}_p = 3{,}62$.
El pueblo más cercano a ese punto es *A*. (Quizá sea esta la mejor solución.)
Véase el gráfico.

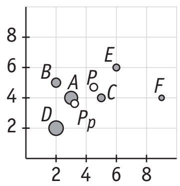


Fig. 18.16.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. **¿Qué tipo de correlación existe entre las siguientes pares de variables?**
a) Precipitación mensual/venta de paraguas.
b) Número de habitantes por médico/mortalidad infantil en un país.
c) Número de habitantes por médico/consumo de gasolina.
d) Edad/reflejos.

a) Directa; b) Inversa; c) Inversa (Es espuria, pues, aunque a mayor número de personas en un país por cada médico el consumo de gasolina es menor, lo primero no es causa de lo segundo; la causa está en que el país es más pobre y, por tanto hay menos médicos, menos coches, menos escuelas, etc); d) Inversa.

2. **Considera los siguientes diagramas de puntos.**

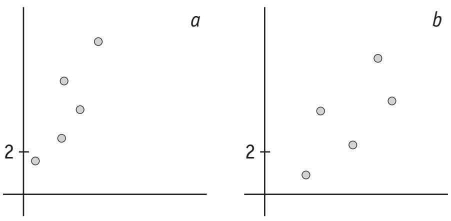


Fig. 18.17.

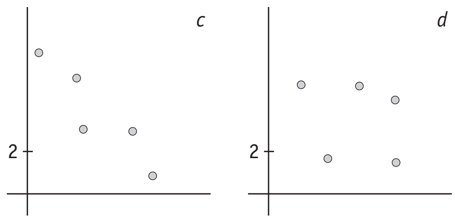


Fig. 18.17.

¿En cuál de ellos la correlación lineal es más fuerte?

En a), aunque podría dudarse entre a) y c)

3. **Indica alguna situación real que se ajuste, aproximadamente, a cada una de las nubes dadas.**

Por ejemplo:
a) Velocidad de un coche y distancia de frenada.
b) La descrita en la cuestión anterior, apartado a).
c) La descrita en la cuestión anterior, apartado b)
d) Edad y simpatía.

4. **¿Qué coeficiente de correlación asignarías a cada una de las nubes de puntos de la cuestión 2?**

a) $r = -0{,}8$
b) $r = -0{,}2$
c) $r = 0{,}7$
d) $r = 0{,}93$

a) $\rightarrow$ c);
b) $\rightarrow$ d);
c) $\rightarrow$ b);
d) $\rightarrow$ a)

5. **Asocia las siguientes rectas de regresión a las nubes de puntos de la cuestión 2:**
a) $y = -0{,}5x + 4$ **b)** $y = x - 2$
c) $y = 2x + 1$ **d)** $y = -x + 5$

a) $\rightarrow$ d);
b) $\rightarrow$ b);
c) $\rightarrow$ a);
d) $\rightarrow$ c)

6. **Representa la nube de puntos asociada al siguiente conjunto de datos bidimensionales:**

X	1	2	3	4	5
Y	2,1	2,5	3,1	4,2	4,5

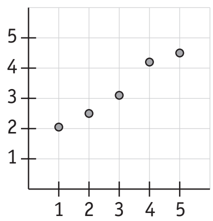


Fig. 18.16.

7. Con los datos anteriores, y sin efectuar cálculos, razona cuál de los siguientes valores es su coeficiente de correlación: 0,3, −0,9, −0,1, 0,98.

La correlación es directa y fuerte: la única posibilidad es 0,98.

8. Para los mismos datos, sin efectuar cálculos, ¿cuál de las siguientes rectas es la de regresión de *Y* sobre *X*?:
$y = 2{,}1 + 4{,}5x$,
$y = 1{,}33 - 0{,}37x$,
$y = 1{,}33 + 0{,}65x$,
$y = 4 + 0{,}65x$

La recta de regresión tiene pendiente positiva y corta al eje *OY* entre 1 y 2; la única posibilidad es $y = 1{,}33 + 0{,}65x$.

9. La recta de regresión asociada a un conjunto de datos es $y = 1{,}33 + 0{,}65x$. Para el valor $x = 3{,}5$, ¿qué predicción de la variable *Y* es razonable efectuar?

$y(3{,}5) = 1{,}33 + 0{,}65 \cdot 3{,}5 = 3{,}605$.

10. Las estimaciones hechas a partir de una recta de regresión son más fiables cuando su ecuación se ha obtenido a partir de:
a) 2 pares de datos.
b) 20 pares de datos.
c) 200 pares de datos
d) Es independiente de los datos considerados.

Toda estimación es más fiable cuando aumenta el tamaño de la muestra, siempre y cuando los elementos se obtengan por algún procedimiento aleatorio.

Actividades

1. Halla el espacio muestral de los experimentos:
a) Tirar tres monedas.
b) Tirar dos dados con seis caras numeradas del 1 al 6.

a) $E = \{CCC, CCX, CXC, CXx, XCC, XCX, XxC, Xxx\}$
b) Al tirar un dado pueden obtenerse seis puntuaciones: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por cada una de ellas, el otro dado proporciona otras seis, luego el total de resultados es $6 \cdot 6 = 36$:
$E = \{(1,1)\ (1,2)\ \ldots\ (1,6)\ (2,1)\ldots(2,6)\ldots(6,1)\ldots(6,6)\}$

2. En el experimento de lanzar tres monedas, halla la probabilidad de los sucesos A={sacar más caras que cruces}, B = {sacar al menos una cruz} y C = {sacar como máximo dos cruces}.

El espacio muestral consta de ocho elementos (ver Ejercicio de aplicación 1). Luego

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ pues los casos favorables son: CCC, CCX, CXC, XCC.

$P(B) = 1 - P(\text{«no sacar cruces»}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(C) = \frac{7}{8}$ ya que los casos favorables son todos menos XXX.

3. En un banco hay dos alarmas A y B. En caso de atraco, la probabilidad de que se activen A, B o ambas, es: $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}85$, $P(A \cap B) = 0{,}65$. Calcula la probabilidad de que:
a) Se active alguna de las dos;
b) Se active sólo una de ellas;
c) No se active ninguna.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}85 - 0{,}65 = 0{,}95$
b) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) =$
$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}75 - 0{,}65 + 0{,}85 - 0{,}64 = 0{,}3$
c) $P[(A \cup B)^C] = 1 - P[(A \cup B)] = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

4. Si de una urna, que contiene 3 bolas blancas y 4 negras, hacemos tres extracciones con reposición (volviendo a meter la bola después de cada extracción), halla la probabilidad de:
a) sacar dos blancas solamente;
b) sacar, al menos, una blanca;
c) sacar más blancas que negras.

a) $P(\text{«2 blancas exactamente»}) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \approx 0{,}315$
b) $P(\text{«al menos 1 blanca»}) = 1 - P(\text{«4 negras»}) =$
$= 1 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \approx 0{,}813$
c) $P(\text{«más blancas que negras»}) =$
$= P(3 \text{ blancas»}) + P(2 \text{ blancas y 1 negra}) =$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \approx 0{,}394$

5. Sabiendo que la probabilidad de los sucesos siguientes es: $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}9$ y $P[(A \cap B)^c] = 0{,}46$, ¿qué se puede decir sobre la independencia de A y B?, ¿de A^c y B?

$P(A \cap B) = 1 - P[(A \cap B)^c] = 1 - 0{,}46 = 0{,}54 = P(A) \cdot P(B)$, luego A y B son independientes.
$P(B) = P[(A^c \cap B) \cup (A \cap B)] = P[(A^c \cap B)] + P[(A \cap B)]$ pues los sucesos $A^c \cap B$ y $A \cap B$ son incompatibles y $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$.
Por tanto,
$0{,}9 = P[(A^c \cap B)] + 0{,}54 \Rightarrow P[(A^c \cap B)] = 0{,}9 - 0{,}54 = 0{,}36 =$
$= P(A^c) \cdot P(B)$, así que A^c y B son independientes.

6. La probabilidad de que un conductor bajo los efectos del alcohol tenga un accidente es 0,1. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga accidente si conduce ebrio?:
a) en tres ocasiones;
b) en siete ocasiones

Si A es el suceso «tener accidente bajo efectos del alcohol», tenemos:
a) $P(A^c \cap A^c \cap A^c) = 0{,}9^3 = 0{,}729$, suponiendo que los sucesos A son independientes y por tanto los A^c.
b) En este caso, la probabilidad de no sufrir accidente en las 7 ocasiones es $0{,}9^7 = 0{,}478$.

7. La población estudiantil de un IES se reparte, entre 3° y 4° de Secundaria y 1° y 2° de Bachillerato, según el 32, 30, 21 y 17 %, respectivamente. Los porcentajes de alumnas en esos cursos son: 52 %, 55 %, 59 % y 64 %. Elegido un alumno al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea varón?

De acuerdo con el diagrama del árbol y designando por
H = {ser varón} y M = {ser mujer}, tenemos
$P(H) = 0{,}32 \cdot 0{,}48 + 0{,}3 \cdot 0{,}45 + 0{,}21 \cdot 0{,}41 + 0{,}17 \cdot 0{,}36 = 0{,}4359$

8. Del total de vehículos que circulan por una autovía, un 8 % son motocicletas y el resto, automóviles. La probabilidad de que se pare a repostar, en cierta gasolinera, un coche es del 5 %, siendo del 12 % que lo haga una moto. Si en cierto instante está repostando un vehículo, ¿qué probabilidad hay de que sea una moto?

Sean M, A y R los sucesos circular en **moto**, **automóvil** y **repostar** en la gasolinera, entonces la probabilidad pedida se calcula:

$$P(M/R) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}12}{0{,}08 \cdot 0{,}12 + 0{,}92 \cdot 0{,}05} = 0{,}173$$

Problemas propuestos

Tipo I: Sucesos. Probabilidad de Laplace

1. En una ciudad hay tres periódicos A, B y C. Describe, mediante las operaciones con sucesos, las siguientes situaciones:
a) Ser lector de algún periódico.
b) Leer A y C y no leer B.
c) Leer sólo uno de ellos.
d) Leer al menos dos diarios.
e) Leer, como máximo, dos diarios.

a) Situación recogida por el suceso unión: $A \cup B \cup C$
b) Leer los diarios A y C y excluir B, se contempla en $A \cap C \cap B^c$.
c) Leer sólo el diario A o B o C, se expresa por:
$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

d) Asegurar la lectura de dos diarios, sin excluir el tercero se pone: $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$
e) Supone ser lector de uno o de dos diarios como máximo: $A\cup B\cup C-(A\cap B\cap C)$

2. Escribe el espacio muestral derivado del experimento: «repartir al azar tres cartas en tres buzones». Construye el suceso $A=$ {sólo una carta llega a su destinatario} y su contrario.

Los sucesos elementales son 6 y podemos representarlos por: $E=\{C_1(i), C_2(j), C_3(k)\}$ siendo $C_1(i)$, $C_2(j)$, $C_3(k)$ introducir la carta 1, 2 y 3 en el buzón *i, j, k,* respectivamente e *i, j, k* cualquiera de las 6 permutaciones formadas con 1, 2 y 3.
$A=\{\mathbf{C_1(1)},\ C_2(3),\ C_3(2);\ C_1(3),\ \mathbf{C_2(2)},\ C_3(1);\ C_1(2),\ C_2(1),\ \mathbf{C_3(3)}\}$ y A^c está formado por los otros 3 sucesos elementales.

3. Una urna contiene dos bolas blancas y dos negras. Se hacen cuatro extracciones con reemplazamiento. Encuentra:
a) Los sucesos *A*: «sólo ha salido una bola negra»; *B*: «la segunda extracción es bola negra».
b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A-B)$.

Si *n* designa bola negra y *b* bola blanca.
a) $A=\{bbbn, bbnb, bnbb, nbbb\}$;
$B=\{nnnn, nnnb, nnbn, bnnn, nnbb, bnbn, bnnb, bnbb\}$
b) $P(A)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$; $\quad P(B)=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$
Como $A\cap B=\{bnbb\}\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{16}$
Por tanto: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$
$=\dfrac{4}{16}+\dfrac{8}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{11}{16}$
$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$

4. Un dado numerado de 1 a 6 se ha lastrado de modo que la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número. Si se lanza una vez, halla la probabilidad de que salga una puntuación impar.

La probabilidad de sacar la numeración *i* es $P(i)=k\cdot i$, $i=1, 2, ..., 6$, además
$P(1\cup2\cup3\cup4\cup5\cup6)=1\Rightarrow$
$P(1\cup2\cup3\cup4\cup5\cup6)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$
$\Rightarrow k+2k+3k+4k+5k+6k=1 \Rightarrow 21k=1\Rightarrow k=\dfrac{1}{21}$
$P(1\cup3\cup5)=P(1)+P(3)+P(5)=\dfrac{1}{21}+\dfrac{3}{21}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$

5. Se sabe de los sucesos *A* y *B* que $P(A)=2/5$, $P(B)=1/3$ y $P(A^c\cap B^c)=1/3$. Halla $P(A\cup B)$ y $P(A\cup B)$

$P(A^c\cap B^c)=P[(A\cup B)^c]=1-P(A\cup B)=1/3\Rightarrow P(A\cup B)=2/3$
Y por la probabilidad de la unión:
$2/3=2/5+1/3-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=1/15$

6. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que:
$P(A\cup B)=3/4$, $P(B^c)=2/3$, $P(A\cap B)=1/4$.
Halla: $P(A)$, $P(B)$ y $P(A^c\cap B)$.

$P(B)=1-P(B^c)=1/3$
$3/4=P(A)+1/3-1/4\Rightarrow P(A)=2/3$
$P(A^c\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=1/3-1/4=1/12$

7. ¿Son compatibles dos sucesos *A* y *B* si se sabe que $P(AC\cup BC)\neq 1$?

Sí porque $P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)\neq 1\Rightarrow P(A\cap B)>0$, luego $A\cap B\neq\varnothing$, y por tanto son compatibles.

8. De una baraja española de 40 cartas se eligen al azar, simultáneamente, cuatro cartas. Halla la probabilidad:
a) De que se hayan elegido al menos dos reyes.
b) De que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

a) Hallemos la probabilidad del suceso pedido recurriendo al suceso contrario:
Con *Cm, n* designamos las variaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*:
$P(\text{«al menos 2 reyes»})=1-P(0\text{ reyes })-P(1\text{ rey})=$
$=1-\dfrac{C_{36,4}}{C_{40,4}}-4\cdot\dfrac{C_{36,3}}{C_{40,4}}=$
$=1-\dfrac{36\cdot35\cdot34\cdot33}{40\cdot39\cdot38\cdot37}-4\cdot4\cdot\dfrac{36\cdot35\cdot34}{40\cdot39\cdot38\cdot37}=1-0{,}957=0{,}043$
b) $P(\text{«sólo 3 del mismo palo»})=$
$=\dfrac{4\cdot C_{10,3}\cdot C_{30,1}}{C_{40,4}}=\dfrac{4\cdot4\cdot10\cdot9\cdot8\cdot30}{40\cdot39\cdot38\cdot37}=0{,}158$

9. A un Congreso asisten 130 personas, de las que 85 hablan castellano; otro conjunto, inglés y 35, ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?

Del enunciado se deduce que 50 personas sólo hablan castellano y llamando *x* las que sólo hablan inglés, resulta: $50+35+x=130\Rightarrow x=45$.
Así, acudiendo al suceso contrario:
$P(\text{«se entiendan 2 personas»})=1-P(\text{«una sólo hable castellano u otra sólo inglés»})=1-2\cdot\dfrac{50}{130}\dfrac{45}{129}=73$

10. Diez personas se sientan en una fila de 10 butacas. Calcula la probabilidad de que las dos mayores estén juntas.

Las diferentes formas de sentarse en un banco 10 personas son las permutaciones $P_{10}=10!$. Los casos favorables a la disposición $P_1\ P_2$ 3 4 5 6 7 8 9 10 son $P_8=8!$ que se repiten 9 veces hasta la disposición 1 2 3 4 5 6 7 8 $P_1\ P_2$.
Todos estos casos se multiplican por 2, que corresponde al cambio entre P_1 y P_2. Entonces,
$P(\text{«2 mayores juntas»})=\dfrac{8!\cdot9\cdot2}{10!}=\dfrac{1}{5}$

11. Un cartero reparte tres cartas al azar entre tres destinatarios. Calcula la probabilidad de que, al menos, una de las tres cartas llegue a su destino correcto.

El suceso contrario al considerado, es que no se reparta ninguna carta correctamente, lo que ocurre en estas dos situaciones:

$C_3(1)\ C_1(2)\ C_2(3)$ o $C_2(1)\ C_3(2)\ C_1(3)$, siendo $C_i(j)$ introducir la carta C_i en el buzón j. Por consiguiente,
P(«acertar en al menos una carta») =
= 1 − P(«no acertar en ninguna») = 1 − 2/6 = 4/6.

12. Se distribuyen tres bolas indistinguibles en dos urnas *A* y *B*.
a) Escribe todas las configuraciones posibles, esto es: describe el espacio muestral asociado a este experimento.
b) Calcula la probabilidad de que la urna *A* contenga exactamente 0, 1, 2 o 3 bolas.

a) Si indicamos con a o b cada una de las bolas que hay en la urna A o en la B, respectivamente, el espacio muestral es: $E = \{aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}$
b) P(0 bolas en A) = $P(bbb)$ = 1/8; P(1 bola) = 3/8;
P(2 bolas) = 3/8; P(3 bolas) = 1/8

13. De una baraja de 40 naipes, se extraen dos cartas simultáneamente. Calcula las siguentes probabilidades.
a) Sean del mismo palo.
b) Una de oros y otra de copas.

Utilizaremos la regla de Laplace y el cálculo combinatorio:

a) $P(\text{del mismo palo}) = 4 = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{3}{13}$

b) $P(\text{oros y copas}) = \dfrac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{5}{39}$

14. Se lanzan cuatro monedas simétricas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?

P(«al menos 2 caras») = 1 − P(0 caras) − P(1 cara) =
= 1 − 1/16 + 4/16 = 1 − 5/16 = 11/16

Tipo II. Probabilidad condicionada

15. Calcula la probabilidad $P(A\cup B)$ sabiendo que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A/B) = 0{,}2$.

$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$ entonces,
$P(A\cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}7$

16. Sean *A* y *B* dos sucesos con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A\cap B) = 0{,}1$. Calcular las probabilidades $P(A/B)$; $P(A/A\cap B)$; $P(A\cap B/A\cup B)$; $P(A/A\cup B)$.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$$
$$P(A/A\cap B)=\frac{P(A\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$$
$$P(A\cap B/A\cup B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{0{,}1}{0{,}5+0{,}3-0{,}1}=\frac{1}{7}$$
$$P(A/A\cup B)=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{5}{7}$$

17. Sean *A* y *B* dos sucesos de un espacio de probabilidad de manera que $P(A)=0{,}4$, $P(B)= 0{,}3$, y $P(A\cap B)= 0{,}1$. Calcula razonadamente:
a) $P(A\cup B)$; b) $P(A^c\cup B^c)$;
c) $P(A/B)$; d) $P(A^c\cap B^c)$

a) $P(A\cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$
b) $P(A^c\cup B^c) = P[(A\cap B)^c] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
c) $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$
d) $P(A^c\cap B^c) = P[(A\cup B)^c] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

18. Se lanzan dos dados. Halla:
a) La probabilidad de que una de las puntuaciones sea par y la otra impar.
b) La probabilidad (condicional) de que una de las puntuaciones sea par, sabiendo que la suma de las dos es 7.

a) $P(\text{«par e impar»}) = 2\cdot\dfrac{3}{6}\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ (ya que también puede ser impar–par)
b) P(«par»/suma 7) = 1 pues para sumar 7 un sumando ha de ser par.

19. Un banco sortea un viaje entre los 100 clientes que han abierto una cuenta bancaria en el último mes. De ellos, 56 son mujeres, 82 están casados y 43 son mujeres casadas. Se pide:
a) Probabilidad de que toque el viaje a un hombre soltero.
b) Si el afortunado es casado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Formemos la tabla de contingencia siguiente:

	Mujeres	Hombres	TOTAL
Casados	43	39	82
Solteros	13	5	18
TOTAL	56	44	100

a) $P(\text{Hombre soltero}) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$

b) $P(\text{Mujer/Casados}) = \dfrac{43}{82}$

20. Una entidad bancaria tiene tres sistemas de alarma independientes, cada uno con una probabilidad de 0,9 de dispararse en caso de robo. Si se produce un robo, calcula la probabilidad de que:
a) Ninguna alarma suene.
b) Suene una sola alarma.
c) Alguna alarma suene.

Designemos por S_i = {suene la alarma i}
a) $P(S_1^c \cap S_2^c \cap S_3^c) = P(S_1^c)\cdot P(S_2^c)\cdot P(S_3^c) = (1-0{,}9)^3 = 0{,}001$
b) $P[(S_1 \cap S_2^c \cap S_3^c)\cup(S_1^c \cap S_2 \cap S_3^c)\cup(S_1^c \cap S_2^c \cap S_3)] =$
$= 0{,}9\cdot(0{,}1)^2 + 0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}1 + (0{,}1)^2\cdot0{,}9 = 3\cdot0{,}9\cdot(0{,}1)^2 = 0{,}027$
c) $P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 1 - P(S_1^c \cap S_2^c \cap S_3^c) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

21. Un archivador tiene 9 cajones. Una carta tiene una probabilidad de 1/9 de estar en el archivador y si está, tiene igual probabilidad de estar en cualquier cajón de los nueve.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el cajón noveno?
b) Abrimos ocho cajones y no está la carta ¿qué probabilidad hay de que esté en el noveno cajón?

a) P(«esté la carta en el 9º cajón») = P(«esté en archivador»).
$P(\text{«esté 9º cajón»}) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

b) P(esté en el 9º cajón/no está en los 8 anteriores) =
$= P(\text{esté en archivador}) = \frac{1}{9}$

22. Se tira un dado dos veces y se consideran los sucesos $A = \{$sacar suma 7$\}$ y $B = \{$al menos una puntuación es múltiplo de 3$\}$. ¿Son A y B sucesos independientes?

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \Rightarrow P(A)=P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(B) = 1 - P$(sacar 1,2,4,5 en los dados) =
$= 1-\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$P(A\cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18} \neq P(A)\cdot P(B)$ y los sucesos no son independientes

23. Una prueba consta de dos ejercicios. Por años anteriores, se sabe que aprueban el primer ejercicio el 60 % de los alumnos, en tanto que sólo lo hacen el 25 % en un segundo ejercicio. Además, la probabilidad de aprobar el segundo ejercicio habiendo superado el primero es 0,4.
a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprueban los dos ejercicios?
b) De los alumnos que aprueban el segundo ejercicio, ¿qué porcentaje aprueba el primero?

a) $P(\text{aprb.1º}\cap\text{aprb. 2º}) = P(\text{aprb.1º}) \cdot P(\text{aprb.2º/aprb.1º}) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

b) $P(\text{aprb.1º/aprb.2º}) = \frac{0{,}24}{0{,}25} = 0{,}96$, 96 %

24. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}40$, $P(B/A) = 0{,}25$ y $P(B) = b$. Halla:
a) El menor valor posible de b
b) El mayor valor posible de b

a) Como $P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$ y $A\cap B \subset B$, la menor probabilidad de B es 0,1 cuando $B \subset A$.

b) $P(A\cup B) = 0{,}4 + \text{b} - 0{,}1 = 0{,}3 + b$ y como el valor máximo de la probabilidad es $1 \Rightarrow b = 0{,}7$.

Tipo III. Probabilidad total

25. Para regular la conducción de agua desde el punto A al B, se dispone de tres válvulas de funcionamiento independiente. (Fig. 19.1). La probabilidad de que esté abierta cada válvula es 0,9. Halla la probabilidad de que, en un momento dado, no circule agua de A a B.

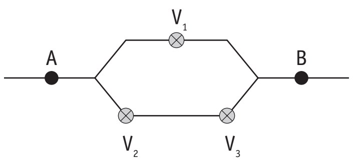


Fig. 19.1.

El agua discurre si las dos válvulas V_2 y V_3 están abiertas o lo está la V_1. Así,
$P[(V_2\cap V_3)\cup V_1] = P(V_2\cap V_3) + P(V_1) - P(V_1\cap V_2\cap V_3) =$
$= 0{,}9\cdot 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9 = 0{,}981$ y
P(no discurra agua) $= 1 - 0{,}981 = 0{,}019$

26. Un determinado día, cierto individuo tiene una probabilidad 0,1 de ir al cine de su barrio y un 0,85 de que se proyecte una película bélica en él. Si no va al cine y ve la televisión, la probabilidad de que emitan una película de ese género en la TV es 0,05.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no vaya al cine y vea una película bélica?
b) ¿Y de que no vea una película bélica ese día?

Sea C = {ir al cine} y B = {ver película bélica}:
Sugerencia: Construir un diagrama de árbol

a) $P(C^c\cap B) = P(C^c) \cdot P(B/C^c) = 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$

b) $P(B^c) = P(C) \cdot P(B^c/C) + P(C^c) \cdot P(B^c/C^c) =$
$= 0{,}1 \cdot 0{,}15 + 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}87$

27. En cierta comunidad, un 20 % de sus integrantes está en paro teniendo, de entre ellos, un 10 % estudios superiores. De los empleados, el 25 % alcanzan ese nivel de estudios. Elegido un individuo al azar, halla la probabilidad de:
a) Que esté en paro y no tenga estudios superiores
b) Que tenga estudios superiores.
c) Que teniendo estudios superiores esté en paro.

Sea P = {estar en paro} y ES = {tener estudios superiores}.
Sugerencia: Construir un diagrama de árbol

a) $P(P\cap ES^c) = P(P) \cdot P(ES^c/P) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$

b) $P(ES) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}22$

c) $P(P/ES) = \frac{P(P\cap ES)}{P(ES)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}22} = \frac{1}{11}$

28. Una caja contiene tres monedas. Una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire. Halla la probabilidad de que salga cara.

Diagrama de árbol:

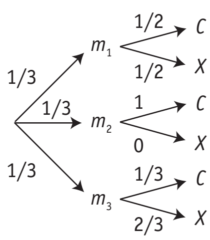


Fig. 19.2.

$P(\text{Cara}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{18}$

29. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = {5 bolas blancas y 2 negras }, B = {7 bolas blancas y 1 negra} y C = {2 bolas blancas y 8 negras}. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

$P(«\text{igual color}») = P(bb) + P(nn) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{5}{7}\frac{4}{6} + \frac{2}{7}\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\frac{1}{9} + \frac{8}{10}\frac{7}{9}\right) = 0{,}432$

30. En cierta floristería recibieron cantidades iguales de rosas y gladiolos, cuyo color es blanco o amarillo. El 60% de los gladiolos es de color amarillo, mientras que el 70% de las rosas es de color blanco.
a) Si elegimos una rosa, ¿qué probabilidad tenemos de que sea de color amarillo?
b) Si cogemos dos gladiolos, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?
c) ¿Qué proporción de flores son de color blanco?

a) $P(\text{Amarilla/rosa}) = 0{,}3$
b) $P(\text{Blanco} \cap \text{Amarillo}) + P(\text{Amarillo} \cap \text{Blanco}) =$
$= 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$
c) $P(\text{Blancas}) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}7 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}4 = 0{,}55 = 0{,}55\,\%$

Tipo IV. Probabilidad Bayes

31. Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60 % de los relojes, de los cuales el 0,4 % son defectuosos; la segunda, le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1,5 %. Un día, el joyero, al vender un reloj, observa que éste no funciona. Halla la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.

Aplicando Bayes:
$P(«1^a \text{ casa}»/ «\text{reloj defectuoso}») =$
$= \frac{0{,}6\cdot 0{,}004}{0{,}6\cdot 0{,}004 + 0{,}4\cdot 0{,}015} = 0{,}937$

32. Imagina que hay una epidemia de cólera. Un síntoma muy importante de la enfermedad es la diarrea pero este síntoma también se presenta en personas con intoxicación e, incluso, en personas que no tienen nada serio. La probabilidad de tener diarrea teniendo cólera, intoxicación y no teniendo nada serio es 0,99, 0,5 y 0,004 respectivamente. Por otra parte, se sabe que el 2 % de la población tiene cólera, el 0,5 %, intoxicación y el resto, 97,5 %, nada serio. Se desea saber:
a) Elegido al azar un individuo de la población, ¿qué probabilidad hay de que tenga diarrea?
b) Se sabe que determinado individuo tiene diarrea, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cólera?

Sean D, C, I, N los sucesos que designan, respectivamente: tener diarrea, cólera, intoxicación y nada serio.
a) $P(D) = P(C) \cdot P(D/C) + P(I) \cdot P(D/I) + P(N) \cdot P(D/N) =$
$= 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}005 \cdot 0{,}5 + 0{,}975 \cdot 0{,}004 = 0{,}0262$
b) Por Bayes: $P(D/C) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}99}{0{,}0262} = 0{,}7557$

33. Dos urnas tienen las siguientes composiciones: la primera, 7 bolas blancas, 5 negras y 3 verdes y la segunda, 10 blancas, 4 negras y 6 verdes. Se traspasa una bola, escogida al azar, de la 1ª urna a la 2ª y a continuación se extrae, una bola de esta urna que resulta ser verde. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola traspasada fuera blanca?

El traspaso de bola de la 1º a la 2ª urna da lugar a las siguientes composiciones:
$A_1 = \{11b, 4n, 6v\}$ con probabilidad 7/15
$A_2 = \{10b, 5n, 6v\}$ con probabilidad 5/15
$A_3 = \{10b, 4n, 7v\}$ con probabilidad 3/15, entonces si V es el suceso extraer bola verde en la segunda ocasión:

$P(A_1/V) = \frac{7/15\cdot 6/21}{7/15\cdot 6/21 + 5/15\cdot 6/21 + 3/15\cdot 7/21} = \frac{14}{31}$

34. Un bien es producido en tres fábricas diferentes *F*1, *F*2 y *F*3, a razón de 100, 140 y 160 unidades diarias. Además, se sabe que un 30 %, 45 % y 20 %, respectivamente, de las cantidades producidas son para exportar. Si se elige una unidad del bien al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea para exportar? Sabiendo que es para la exportación, ¿qué probabilidad hay de que se haya fabricado en *F*1?

El árbol nos ayudará a hallar los términos de la fórmula de Bayes:

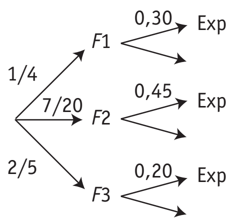


Fig. 19.3.

$P(\text{Exp}) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}30 + \frac{7}{20}\cdot 0{,}45 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}20 = 0{,}3215$

$P(F_1/\text{Exp}) = \frac{P(F_1 \cap \text{Exp})}{P(\text{Exp})} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}3}{0{,}3125} = 0{,}24$

35. Los hombres y mujeres que se presentan a cierta oposición están en la relación 3/4. Si un 25 % de los hombres y un 20 % de las mujeres ha suspendido, ¿qué probabilidad hay de que, si se elige al azar una persona suspensa, sea hombre?

Sean $H = \{\text{hombre}\}$, $M = \{\text{mujer}\}$ y $S = \{\text{suspender}\}$. Entonces, por Bayes:
$P(S) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) = \frac{3}{7}\cdot 0{,}25 + \frac{4}{7}\cdot 0{,}2 = 0{,}22$ y

$P(H/S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{4}{7}\cdot 0{,}2}{0{,}22} = 0{,}52$

36. Una caja contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se extrae una bola y se reemplaza por tres de ese color. A continuación se saca otra bola y resulta ser blanca. Halla la probabilidad de que la bola extraída en la primera ocasión fuera blanca también.

Según sea la primera bola extraída tenemos las posibles urnas:

$U_1 = \{6 \text{ bolas } b \text{ y } 6 \text{ bolas } n\}$ con probabilidad $\frac{4}{10}$ y

$U_2 = \{4 \text{ bolas } b \text{ y } 8 \text{ bolas } n\}$ con probabilidad $\frac{6}{10}$. Es decir

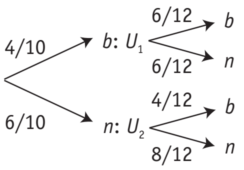


Fig. 19.4.

Luego, por la fórmula de Bayes:
$P(1^{\text{a}}\ b/2^{\text{a}}\ b) = P(U_1/2^{\text{a}}\ b)$

$$= \frac{P(U_1)\cdot P(2^{a}b/U_1)}{P(U_1)\cdot P(2^{a}b/U_1) + P(U_2)\cdot P(2^{a}b/U_2)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 0{,}5$$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Forma el espacio muestral del experimento consistente en tirar un dado y una moneda a la vez.

$E = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X\}$

2. Representa mediante un diagrama de Venn dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}30$.

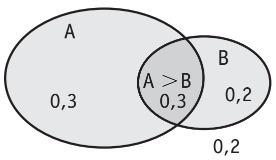


Fig. 19.5.

3. Para los sucesos del experimento anterior halla.
a) $P(A \cup B)$; b) $P(A^c)$;
c) $P(B^c)$; d) $P[(A \cap B)^c]$

a) $P(A) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$
b) 0,4
c) 0,5
d) 0,7

4. Para el mismo experimento halla:
a) $P(A/B)$;
b) $P(B/A)$

a) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = 0{,}3/0{,}5 = 0{,}6$ (son independientes)
b) 0,5

5. Halla la probabilidad de $A \cup B$ sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}7$ y que A y B son dos sucesos independientes.

$P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 \Rightarrow$
$\Rightarrow\ P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}28 = 0{,}82$

6. Tiramos una moneda tres veces consecutivas. ¿Qué probabilidad hay de que salgan dos caras seguidas, pero no tres?

Casos favorables: CCX, $XCC \Rightarrow P(CCX, XCC) = 2/8 = 1/4$

7. Un cajón contiene 6 pantalones y otro semejante, 6 camisas a juego de aquéllos. Si se elige un pantalón y una camisa al azar, ¿qué probabilidad existe de que formen pareja?

Es como obtener dobles en el lanzamiento de dos dados. Vale 1/6

8. De una baraja española de 40 cartas extraemos 3. Halla la probabilidad de:
a) Sacar 3 copas. b) Al menos una copa.

a) $P(3 \text{ copas}) = \frac{10}{40}\,\frac{9}{39}\,\frac{8}{38}$

b) $P(\text{al menos 1 copa}) = 1 - P(0 \text{ copas}) = 1 - \frac{30}{40}\,\frac{29}{39}\,\frac{28}{38}$

9. Se ha realizado un estudio sobre la relación entre el tabaco y el cáncer de pulmón. La tabla siguiente presenta los resultados obtenidos.

	Fumadores (F)	No fumadores (N)	Total
Con cáncer (C)	30	10	40
Sin cáncer (S)	150	210	360
Total	180	220	400

Halla las siguientes probabilidades:
a) P(de tener cáncer) $= P(C)$
b) $P(F)$
c) P(de tener cáncer si se es fumador) $= P(C/F)$
d) P(de ser fumador si se tiene cáncer) $= P(F/C)$

a) $P(C) = 40/400 = 0{,}1$
b) $180/400 = 0{,}45$
c) $30/180 = 1/6$
d) $30/40 = 0{,}75$

10. Construye el diagrama de árbol correspondiente a la tabla anterior. Utilizándolo, determina la probabilidad de ser fumador y tener cáncer: $P(F \cap C)$.

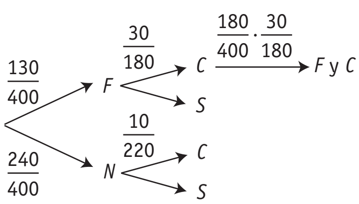


Fig. 19.6.

$$P(F \cap C) = \frac{180}{400}\cdot\frac{30}{180} = \frac{30}{400} = 0{,}075$$

Actividades

1. Encuentra la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X* que mide la diferencia entre las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

La diferencia de puntuaciones queda medida por la variable *X*: 0, 1, 2, 3, 4, 5 que asignando probabilidades a cada valor se tiene:

X	0	1	2	3	4	5
***P*(*X*)**	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

2. Para una variable $X = B(10, 0{,}2)$, calcula las probabilidades siguientes:
a) $P(X=8)$; b) $P(X<9)$; c) $P(3<X\leqslant 6)$

Mirando en la tabla obtenemos:
a) $P(X=8) = 0{,}0001$
b) $P(X<9) = 1 - P(X=9) - P(X=10) = 1 - 0{,}0000 - 0{,}0000 = 1$
c) $P(3<X\leqslant 6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$
$= 0{,}0881 + 0{,}0264 + 0{,}0055 = 0{,}12$

3. La función de densidad de una variable aleatoria *X* es
$$f(x) = \begin{cases} k\,(x+4) & \text{si } 0<x<4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
a) Calcula el valor de *k*.
b) Representa gráficamente *f*(*x*).
c) Halla la probabilidad de que $X\in[2, 4]$.

a) $\displaystyle\int_0^4 K(x+4)dx = k\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_0^4 = k\cdot 24 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{24}$

b)

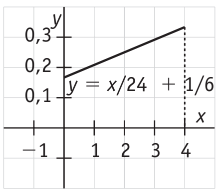


Fig. 20.1.

c) $P(2\leqslant x\leqslant 4) =$
$$\int_2^4 \frac{1}{24}(x+4)dx = \left[\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\right]_2^4 = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

4. Encuentra la media, varianza y desviación típica de la variable de la Actividad 3.

$$\mu = \int_0^4 x\,\frac{1}{24}(x+4)dx = \left[\frac{x^3}{72}+\frac{x^2}{12}\right]_0^4 = \frac{64}{72}+\frac{16}{12} = \frac{88}{72} = \frac{20}{9}$$
$$V(x) = \int_0^4 x^2\,\frac{1}{24}(x+4)dx - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \left[\frac{x^4}{96}+\frac{x^3}{18}\right]_0^4 - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{104}{81}$$
$\sigma = \sqrt{104}/9$

5. Para la misma distribución de pilas del ejemplo 5, calcula la probabilidad de que una pila dure:
a) Entre 42 y 71 h.
b) Menos de 28 h.
c) Más de 66 h.

a) $P(42<X<71) =$
$= P\left(\dfrac{42-60}{5} < Z < \dfrac{71-60}{5}\right) = P(-3{,}6 < Z < 2{,}2) =$
$= 0{,}9861 - 0{,}0002 = 0{,}9859$

b) $P(X<28) = P\left(Z<\dfrac{28-60}{5}\right) = P(Z<-6{,}4) = 0$

c) $P(X>66) = P\left(Z>\dfrac{66-60}{5}\right) = P(Z>1{,}2) = 0{,}1151$

6. En el ejemplo 6, ¿cuál sería la altura máxima del 15 % de los muchachos de menor altura?

El valor de z_0 tal que $P\left(\dfrac{X-168}{8} \leqslant Z_0\right) = 0{,}15$ resulta ser, aproximadamente,
$z_0 = -1{,}035$ (la media entre los valores 1,03 y 1,04).
Así, $X = 168 - 8\cdot 1{,}035 = 159{,}72 \approx 160$ cm.

7. El 46 % de los residentes en cierta localidad son hinchas del equipo local de fútbol. Elegidos 60 habitantes al azar, ¿qué probabilidad hay de que 35 de ellos sean hinchas del club local?

$B(60,\ 0,\ 46) \approx 3N(27'6,\ 3'86)$ y
$P(X=35) = P(24{,}5 < X' < 35{,}5) = 0{,}9798 - 0{,}9633 = 0{,}0165$.

Problemas propuestos

Tipo I: Distribuciones de probabilidad

1. Una variable aleatoria *X* toma los valores $i = 1, 2, ..., 5$ con probabilidad $P(X=i) = m\cdot i$. Calcula el valor de *m* y la probabilidad $P(X<3)$.

La suma de las probabilidades ha de ser la unidad, entonces:
$m + 2m + 3m + 4m + 5m = 1 \Rightarrow m = 1/15$
Por otro lado, $P(X<3) = P(X=1) + P(X=2) = 1/15 + 2/15 =$
$= 3/15 = 1/5$

2. Construye la distribución de probabilidad de la mayor puntuación obtenida al lanzar dos dados.

La variable puede tomar los valores $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, con probabilidades:

$P(X=1) = \dfrac{1}{36}$, suceso elemental (1,1)

$P(X=2) = \dfrac{3}{36}$, sucesos elementales: (1,2), (2, 1), (2,2)

$P(X=3) = \dfrac{5}{36}$, sucesos elementales: (1,3), (2, 3), (3,3), (3,1), (3,2)

$P(X=4) = \dfrac{7}{36}$, sucesos elementales: (1,4), (2, 4), (3,4), (4,4), (4,1), (4,2), (4,3)

$P(X=5) = \dfrac{9}{36}$, sucesos elementales: (1,5), (2, 5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,1), (5, 2), (5,3), (5,4)

$P(X=6) = \dfrac{11}{36}$, sucesos elementales: (1,6), (2, 6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6, 1), (6,2), (6,3), (6, 4), (6,5)

3. El número de llamadas que se reciben en una centralita telefónica, en media hora, se distribuyen según la tabla:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	0,01	0,05	0,1	0,1	0,2	0,3	0,24

Calcula el número medio de llamadas y su desviación típica.

La media de la distribución resulta ser:
$\mu = 0\cdot 0{,}001 + 1\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}24 = 4{,}29$ llamadas
La varianza se calcula por: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 2{,}28$ y la desviación típica $\sigma = 1{,}51$

4. Sea X el número de casos nuevos de SIDA, diagnosticados en un importante hospital, durante un día. La función de probabilidad para X es:

Casos de SIDA, x	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad, p	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1

a) Halla la probabilidad de que un día cualquiera, por lo menos 3 casos nuevos sean diagnosticados.
b) Halla la media de casos diagnosticados al día y la desviación típica.

a) P(al menos 3 casos nuevos) =
$= P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) =$
$= 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$
b) $\mu = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 = 3{,}10$
$\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 =$
$= 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}1 + 36\cdot 0{,}1 - 3{,}1^2 =$
$= 2{,}89$ y $\sigma = 1{,}7$

5. Contabilizamos la diferencia de puntuaciones de cada parte de una ficha de dominó. Halla la media y la desviación típica de la variable asociada.

La variable X = «diferencia de puntuaciones en una ficha de dominó», se distribuye:

X	Probabilidad
0	7/28=1/4
1	6/28=3/14
2	5/28
3	4/28=1/7
4	3/28
5	2/28=1/14
6	1/28

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{14} + 2\frac{5}{28} + 3\cdot\frac{1}{7} + 4\cdot\frac{3}{28} + 5\cdot\frac{1}{14} + 6\cdot\frac{1}{28} = \frac{56}{28} = 2$$

$$\sigma^2 = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{14} + 4\cdot\frac{5}{28} + 9\cdot\frac{1}{7} + 16\cdot\frac{3}{28} + 25\cdot\frac{1}{14} + 36\cdot\frac{1}{28} - 2^2 =$$

$$= \frac{196}{28} - 4 = 3$$

$\sigma = \sqrt{3}$

6. ¿Qué precio estarías dispuesto a pagar por participar en una lotería en la que puedes ganar 15 000 € con una probabilidad del 0,2 o 50 000 con probabilidad 0,05?

La esperanza matemática de ganancia es:
$15\,000 \cdot 0{,}2 + 50\,000 \cdot 0{,}05 = 5\,500$ €, por lo que ese debe ser el precio de la apuesta

7. La función de densidad de cierta variable continua está representada en la gráfica:

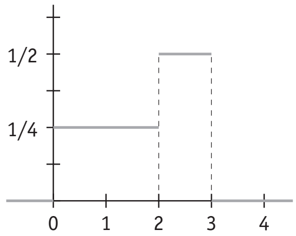


Fig. 20.2.

Calcula la probabilidad $P(1 < X < 5/2)$.

La $P(1 < X < 5/2)$ podemos hallarla por métodos elementales sumando las áreas de los dos rectángulos que se forman:
$1/4 \cdot (2 - 1) + 1/2\,(5/2 - 2) = 2/4 = 1/2$
Comprueba lo correcto de la solución hallando las áreas mediante integrales.

8. Calcula el valor de k para que la función representada en la figura sea de densidad. Una vez hallado el valor de k encuentra la probabilidad $P(1/2 < X < 2)$.

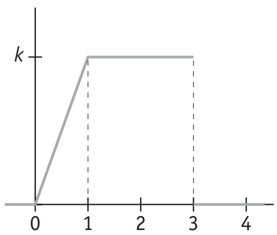


Fig. 20.3.

Por métodos geométricos, evitamos hallar la ecuación de los lados, así:
Área del trapecio: $\frac{2+3}{2}\,k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$
$P(1/2 < X < 2) = P(1/2 < X < 1) + P(1 < X < 2) =$

$$= \frac{{}^{1}/_{2}\cdot{}^{2}/_{5} + {}^{2}/_{5}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + (2-1)\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{20} + \frac{2}{5} = \frac{11}{20}$$

9. Una variable aleatoria X mide las diferencias, en valor absoluto, de la capacidad de memoria en la fabricación de lápices ópticos (pen drives) de 1 Gb. Su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 200(1 - 100x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/100 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula $P\left(\frac{2}{500} \leqslant X \leqslant \frac{1}{200}\right)$ y explica su significado.

$$P\left(\frac{2}{500} \leqslant X \leqslant \frac{1}{200}\right) =$$

$$\int_{2/500}^{1/200} 200(1-100x)dx = \left[200\left(x-\frac{50x^2}{2}\right)\right]_{2/500}^{1/200} = \frac{220}{2\,000} = 0{,}11$$

10. La función de densidad de cierta variable es

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{3} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Haz su representación gráfica.
b) Calcula la probabilidad $P(0{,}4 < X < 1{,}6)$.

a)

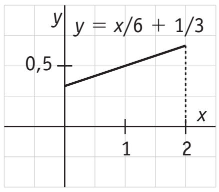


Fig. 20.4.

b) La probabilidad pedida se obtiene mediante el área del trapecio de vértices (0,4 0), (0,4, 0,4), (1,6, 0) y (1,6, 0,6):

$$P(0{,}4 < X < 1{,}6) = \frac{0{,}4+0{,}6}{2}\,(1{,}6-0{,}4) = 0{,}6$$

11. La función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ si $2 < x < e+1$, es de densidad de la variable X. Represéntala y calcula $P(2{,}4 < X < 2{,}8)$.

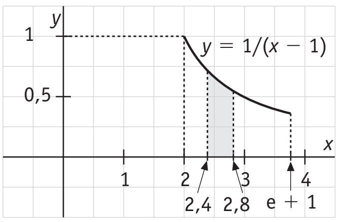


Fig. 20.5.

$P(2{,}4 < X < 2{,}8) =$

$$\int_{2{,}4}^{2{,}8} \frac{dx}{x-1} = [\ln(x-1)]_{2{,}4}^{2{,}8} = \ln 1{,}8 - \ln 1{,}4 = 0{,}25$$

Tipo II. Distribución binomial

12. Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero-falso. Se aprueba con 8 o más preguntas acertadas. Si se responden al azar las cuestiones, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

Las X preguntas acertadas se distribuye $B(10,\ 0{,}5)$, entonces:
$P(X \geqslant 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$
$= 0{,}0439 + 0{,}0098 + 0{,}0010 = 0{,}0547$

13. Se han reunido 1 000 familias con 3 hijos. ¿En cuántas se podrán contabilizar 2 chicas? ¿Y en cuántas al menos una chica? (Toma la probabilidad de nacimiento de niña 0,5).

El número de niñas en familias de 3 hijos se distribuye $B(3,\ 0{,}5)$, por tanto:
$P(X = 2) = 0{,}375 \ \Rightarrow\ 1\,000 \cdot 0{,}375 = 375$ familias tendrán 2 niñas.

$P(\text{«al menos una chica»}) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}875 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\,000 \cdot 0{,}875 = 875$ familias tendrán al menos, una niña.

14. En un proceso de fabricación se producen un 5 % de piezas defectuosas. Si se examinan 6 de ellas, ¿cuál es la probabilidad para estos casos?
a) Haya a lo sumo 4 defectuosas.
b) Haya una o dos defectuosas.

El número de defectuosas, X, se distribuye $B(6,\ 0{,}05)$
a) $P(X \leqslant 4) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) =$
$= 1 - 0{,}0000 - 0{,}0000 = 1$
b) $P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2321 + 0{,}0305 = 0{,}2626$

15. El 30 % de los clientes de un banco piden adelanto de nómina una vez al año. Seleccionados 7 clientes al azar, ¿qué probabilidad existe de que entre 4 y 6 hayan solicitado adelanto de haberes?

Sea X el nº de clientes que piden adelanto de nómina, se distribuye $B(7,\ 0{,}3)$. Así que
$P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$= 0{,}0972 + 0{,}025 + 0{,}0036 = 0{,}1258$

16. Una familia se compone de los padres y 6 hijos. Suponiendo igual la probabilidad de nacimiento de niño o niña, calcula:
a) Probabilidad de tener más de una niña.
b) Al menos un niño.
c) Como máximo dos niños.
d) El número medio de hijas.

El número de hijas se distribuye $B(6,\ 0{,}5)$:
a) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}0156 - 0{,}0938 =$
$= 0{,}8906$
b) $P(X < 6) = 1 - P(X = 6) = 1 - 0{,}0156 = 0{,}9844$
c) $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$= 0{,}2344 + 0{,}0938 + 0{,}0156 = 0{,}3438$
d) La media de hijas es $6 \cdot 0{,}5 = 3$

17. Un test de respuesta múltiple se compone de 10 preguntas y cada una de ellas presenta una única respuesta correcta de las cuatro posibles.
Si el test se supera con 3 o más respuestas correctas:
a) ¿Cuál es la probabilidad de superarlo respondiendo al azar?
b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar las 10 preguntas respondiendo al azar?

La probabilidad de respuesta correcta es 1/4, luego el problema puede estudiarse como una binomial $B(10,\ 1/4) = B(10,\ 0{,}25)$.
Si X es la variable que mide el número de aciertos se tendrá:
a) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) =$
$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 -$
$$-\binom{10}{0}\cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} - \binom{10}{1}\cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 - \binom{10}{2}\cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^8 =$$
$= 1 - 0{,}0563 - 0{,}1877 - 0{,}2816 = 0{,}4744$

b) $P(X = 10) = \dbinom{10}{10}\cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^0 = 0{,}25^{10} = 9{,}5 \cdot 10^{-7}$

18. Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes, han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Encuentra la probabilidad de que en 25 años:
a) Vivan los 4.
b) No viva ninguno.
c) El número medio de supervivientes.

$X =$ «nº de superviviventes» es $B(4,\ 0{,}7)$
a) $P(X = 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$
b) $P(X = 0) = 0{,}3^4 = 0{,}0081$
c) La media es $7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8$

19. En un centro hospitalario, los fines de semana hay una plantilla de cinco médicos para atender las urgencias. Si sólo un 10 % de éstas exigen atención con una UVI móvil, calcula el número de UVI que deben estar disponibles si queremos que la probabilidad de que se necesite un número mayor sea sólo de 0,05.

Si llamamos $X =$ nº de UVI móviles que se necesitan, X es $B(5,\ 0{,}1)$ pues cada UVI ha de ser dirigida por un médico y queremos que
$P(X \leqslant n) = 0{,}95 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = n) = 0{,}95 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0{,}5905 + 0{,}3280 + 0{,}0729 = 0{,}9914 > 0{,}95.$
Así que con 2 UVI se tiene cubierto el servicio en el 95 % de los casos.

Tipo III. Distribución normal. Tipificación

20. Si X es una variable continua $N(28,\ 5)$, halla las probabilidades:
a) $P(X > 31)$; b) $P(28 < X < 35{,}5)$;
c) $P(20 < X < 38)$

a) $P(X > 31) = P\left(Z > \frac{31-28}{5} = 0{,}6\right) = 1 - P\ (Z < 0{,}6) =$
$= 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$
b) $P(28 < X < 35{,}5) =$
$= P\left(0 < Z < \frac{35{,}5-28}{5} = 1{,}5\right) = P\ (Z < 1{,}5) - \frac{1}{2} = 0{,}4332$
c) $P(20 < X < 38) =$
$= P\left(\frac{20-28}{5} < Z < \frac{38-28}{5}\right) = P\ (-1{,}6 < Z < 2) = 0{,}9224$

21. Sea X variable $N(50,\ 6)$, encuentra el valor de k para que $P(X \leqslant -k) = 0{,}10$

$P(X \leqslant k) = 0{,}10 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k-50}{6}\right) = 0{,}10 \Rightarrow L\left(-\frac{k-50}{6}\right) = 0{,}90 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{k-50}{6} \approx 1{,}28 \Rightarrow k = 42{,}32$

22. Si X es variable $N(\mu,\ \sigma)$ y se tiene que $P(X < 4) = 0{,}2546$ y $P(X < 7) = 0{,}9082$, halla los valores de μ y σ.

- $P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2546 = 0{,}2546 \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma} = -0{,}66$
- $P\left(Z < \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9082 \Rightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} = 1{,}33$

El sistema nos proporciona la solución: $\mu = 5$ y $\sigma = 3/2$

23. En una distribución normal, halla el porcentaje de valores que distan de la media:
a) Menos de 1,2 desviaciones típicas.
b) Entre 0,5 y 1 desviación típica.

a) $|X - \mu| < 1{,}2 \cdot \sigma \Rightarrow -1{,}2 < Z < 1{,}2$, luego
$P(-1{,}2 < Z < 1{,}2) = 0{,}7698 \Rightarrow 76{,}98\,\%$ de valores
b) $0{,}5\sigma < |X - \mu| < \sigma \Rightarrow 0{,}5 < Z < 1$ y
$P(0{,}5 < Z < 1) = 0{,}1498$

24. Las ventas de CD en un centro comercial se distribuyen según una normal $N(50,\ 10)$. ¿Qué es más probable que se vendan en un día, más de 65 cintas o menos de 30?

$P(X > 65) = 0{,}0668$ y $P(X < 30) = 0{,}0228$.

25. Las alturas de 500 estudiantes varones están distribuidas normalmente con media 1,72 m y desviación típica 12 cm. Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes tienen una altura?:
a) Igual a 1,70 m b) Menor que 1,60 m
c) Entre 1,75 y 1, 90 m

a) 0
b) $P(X < 1{,}60) = 0{,}1587 \Rightarrow$
$\Rightarrow 500 \cdot 0{,}1587 = 79{,}35 \approx 79$ estudiantes.
c) $P(1{,}75 < X < 1{,}90) = 0{,}3345 \Rightarrow 500 \cdot 0{,}3345 =$
$= 167{,}25 \approx 167$ estudiantes

26. Los archivos de sonido MP3 tienen un tamaño, en Mb, que puede considerarse que se distribuye N(4, 1). De 160 archivos ¿cuántos tendrán un volumen entre 2,5 y 5,5 Mb?

$P(2{,}5 < X < 5{,}5) =$
$= P\left(\frac{2{,}5-4}{1} < Z < \frac{5{,}5-4}{1}\right) =$
$= P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = 2 \cdot P(Z < 1{,}5) - 1 = 0{,}8664$
De 160, habrá entre esas capacidades $160 \cdot 0{,}8664 = 139$ archivos

27. Las notas medias finales de los alumnos de primero de Bachillerato de un Centro se distribuyen normalmente con media 5,6 y desviación típica 1,4. El 15 % de los alumnos con mejor nota final podrán acceder a una beca. ¿Cuál ha de ser la nota mínima para poder ser becario?

El valor de x_0 que verifica:
$P\left(\frac{x_0-5{,}6}{1{,}4} > z_0\right) = 0{,}15 \Rightarrow x_0 = 5{,}6 + 1{,}4 \cdot 1{,}035 = 7{,}05 \approx 7$ de nota.

28. Se ha aplicado un test de fluidez verbal a 500 alumnos de primero de ESO de un centro de secundaria. Se supone que las puntuaciones obtenidas se distribuyen según una normal de media 80 y desviación típica 12. Se pide:
a) ¿Qué puntuación separa el 25 % de los alumnos con menos fluidez verbal?

b) ¿A partir de qué puntuación se encuentra el 25 % de los alumnos con mayor fluidez verbal?

a) Hay que calcular el valor de z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0{,}25 \Rightarrow$ $\Rightarrow z_0 \approx -0{,}675$.

Luego, $-0{,}675 = \dfrac{X - 80}{12} \Rightarrow X = 71{,}9$.

b) En este caso, hay que calcular el valor de z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0{,}75 \Rightarrow z_0 \approx 0{,}675$.

Luego, $0{,}675 = \dfrac{X-80}{12} \Rightarrow X = 88{,}1$.

Tipo IV. Aproximación de la binomial

29. Se lanza una moneda 300 veces y la variable *X* contabiliza el número de caras sacadas. Halla la probabilidad de:
a) sacar más de 180 caras
b) que el número de caras obtenido esté entre 160 y 180.

Se trata de una binomial $B(300,\ 1/2)$ que aproximamos por la normal de media $\mu = 300 \cdot 1/2$ y desviación típica, $\sqrt{300 \cdot 1/2 \cdot 1/2}$, es decir, $N(150,\ \sqrt{75})$

a) $P(X > 180) = P(X' > 180{,}5) =$

$= P\left(Z > \dfrac{180{,}5 - 180}{\sqrt{75}}\right) P(Z > 3{,}52) = 0$

b) $P(160 < X < 180) = P(160{,}5 < X' < 179{,}5) =$
$= P(-1{,}1 < Z < 3{,}40) = 0{,}9997 - 0{,}8643 - 1 = 0{,}8640$

30. Se lanza un dado 720 veces. Calcula la probabilidad aproximada de que salgan, al menos, 110 seises.

Se trata de un experimento binomial: $B\left(720, \dfrac{1}{6}\right)$.

Puede aproximarse mediante la normal de media

$\mu = 720 \cdot \dfrac{1}{6} = 120$ y $\sigma = \sqrt{720 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6}} = 10$: $N(120,\ 10)$.

Con esto, $P(X \geq 110) = P(X' > 109{,}5)$, haciendo la corrección de continuidad.

Luego, $P(X' > 109{,}5) = P\left(Z > \dfrac{109{,}5 - 120}{10}\right) =$

$= P(Z > -1{,}05) = 0{,}8531$.

31. Una urna contiene 6 bolas blancas y 9 negras. Se hacen 35 extracciones reponiendo la bola que se extrae. Halla la probabilidad de haber sacado entre 12 y 16 bolas blancas, ambas inclusive.

Se trataría de una binomial $B(35,\ 6/15 = 0{,}4)$ que aproximamos por una normal de media $\mu = 35 \cdot 0{,}4 = 14$ y desviación típica, $\sqrt{35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 2{,}9$.
$P(12 < X < 16) = P(12{,}5 < X' < 15{,}5) = P(-0{,}52 < Z < 0{,}52) = 0{,}397$

32. En una prueba de tipo test, cada pregunta contiene 4 opciones de las que sólo una es verdadera. Si se contestan 20 preguntas al azar, ¿qué probabilidad hay de acertar al menos 12 correctamente?

La Binomial $B(20,\ 1/4)$ la aproximamos por una normal $N(5,\ 1{,}94)$
$P(X \geq 12) = P(X' \geq 11{,}5) = P(Z \geq 3{,}35) = 1 - 0{,}9996 = 0{,}0004$

33. De una urna que contiene una bola blanca y 2 bolas negras se hacen extracciones sucesivas de una bola con reemplazamiento. Llamamos *X* al número de bolas blancas extraídas.
a) Si se hacen cinco extracciones, ¿cuál es la distribución de probabilidad de *X*? ¿Cuánto valen su media y su desviación típica? ¿Cuál es el valor de $P(X \geqslant 2)$?
b) Si se hacen 288 extracciones, ¿cuál es la probabilidad de que salgan más de 90 bolas blancas?

El experimento es de tipo binomial, con $P(\text{blanca}) = p = \dfrac{1}{3}$.

Para $n = 5$, será $B\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$.

Para $n = 288$, será $B\left(288, \dfrac{1}{3}\right)$.

a) Para la $B\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$, se tiene: $P(X = r) = \dbinom{n}{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^r\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-r}$

$P(X = 0) = \dbinom{5}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{32}{243}$

$P(X = 1) = \dbinom{5}{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{80}{243}$

$P(X = 2) = \dbinom{5}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{80}{243}$

$P(X = 3) = \dbinom{5}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{40}{243}$

$P(X = 4) = \dbinom{5}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{10}{243}$

$P(X = 5) = \dbinom{5}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = \dfrac{1}{243}$

Media: $\mu = 5 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{5 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$= \dfrac{80 + 40 + 10 + 1}{243} = \dfrac{131}{243}$

b) La binomial $B\left(288, \dfrac{1}{3}\right)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = 288 \cdot \dfrac{1}{3} = 96$ y $\sigma = \sqrt{288 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = 8$: $N(96,\ 8)$.

Con esto, $P(X > 90) = P(X' > 90{,}5)$, haciendo la corrección de continuidad.
Así,
$P(X' > 90{,}5) = P\left(Z > \dfrac{90{,}5 - 96}{8}\right) = P(Z > -0{,}6875) = 0{,}7549$.

34. Un tirador de competición tiene una probabilidad de hacer blanco de 0,8. Efectúa dos series de tiradas de 20 lanzamientos cada una. Halla la probabilidad de que en alguna de las tiradas haya conseguido al menos 17 blancos.

El número de blancos sigue $B(20,\ 0{,}8)$ que se aproxima por $N(16,\ 1{,}79)$

$P(X \geq 17) = P(X' \geq 16{,}5) = P(Z \geq 0{,}28) = 0{,}3897$, así que la probabilidad pedida es.

P(«De la unión») $= P(X \geq 17$ en la 1ª tirada$) + P(X \geq 17$ en la 2ª tirada$) - P(X \geq 17$ en la 1ª tirada $) \cdot P(X \geq 17$ en la 2ª tirada$) = 0{,}3897 + 0{,}3897 - (0{,}3897)^2 = 0{,}6275$

35. En cierta comunidad el porcentaje de individuos con estudios medios es del 35 %. Elegidos 8 individuos al azar, calcula la probabilidad de que entre 3 y 5 (ambos incluidos) tengan estudios medios, aplicando:
a) La distribución binomial.
b) La aproximación normal a la binomial.

Estamos ante una binomial $B(8,\ 0{,}35)$, por ello:

a) $P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}2786 + 0{,}1875 + 0{,}0808 =$
$= 0{,}5469$

b) La normal que mejor aproxima la binomial dada es $N(8 \cdot 0{,}35,\ \sqrt{8 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65}\,) = N(2{,}8,\ 1{,}35)$. Entonces
$P(3 < X < 5) = P(2{,}5 < X' < 5{,}5) = P(-0{,}22 < Z < 2) =$
$= P(Z < 2) - P(Z < -0{,}22) = 0{,}9772 - 0{,}4129 = 0{,}5643$

36. Un Club del Ocio, del que forman parte 65 socios, ha organizado una partida múltiple de ajedrez, contando con la presencia de un Gran Maestro. La probabilidad de que un socio se apunte a la partida es del 40 %. Averigua cuántos tableros han de disponerse si se desea que la probabilidad de que todo el que quiera participar disponga de tablero sea mayor del 90 %.

La distribución de socios que se apunten a la partida múltiple sigue una $B(65,\ 0{,}4)$ que aproximaremos por $N(26,\ 3{,}95)$; llamemos n el número de tableros disponibles que deseamos satisfagan que:

$P(X \leq n) \geq 0{,}9 \Rightarrow P(X' \leq n + 0{,}5) =$

$$= P\left(Z < \frac{n + 0{,}5 - 26}{3{,}95}\right) \geq 0{,}9.$$

Como $P(Z \leq 1{,}28) \approx 0{,}9$, para $\dfrac{n + 0{,}5 - 26}{3{,}95} \geq 1{,}28$ se cumplirá que la probabilidad supera 0,9, así que $n \geq 25{,}5 + 5{,}1 = 30{,}6$ por lo que será suficiente disponer de 31 tableros.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 20 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. La variable discreta X es tal que $P(X=0) = 0{,}6$ y $P(X=a) = 0{,}4$. Si la media de la distribución es $\mu = 2$ ¿cuál es el valor el valor de a?

$2 = 0 \cdot 0{,}6 + a \cdot 0{,}4 \Rightarrow a = 5$

2. Una variable X se distribuye como una $B(6,\ 0{,}1)$, calcula la probabilidad $P(X=2)$.

$P(X=2) = 0{,}0984$, obtenido de la tabla de la binomial

3. Calcula el valor de k para que la función
$$f(x) = \begin{cases} k \text{ si } 0 < x < 10 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$
sea de densidad de cierta variable. (*Recuerda:* El área por debajo de la curva debe valer 1.)

Como $\int_0^{10} k\,dx = [kx]_0^{10} = k \cdot (10 - 0) = 1 \Rightarrow k = 1/10$

4. Cita 3 procesos cuyo comportamiento puede ajustarse a las condiciones llamadas *normales*.

a) La altura de un colectivo de personas;
b) Los diámetros de los cojinetes fabricados por un torno;
c) El índice de aceptación de un político.

5. Si Z es $N(0,\ 1)$ calcula:
a) $P(Z < 1{,}52)$;
b) $P(Z > -0{,}5)$

a) 0,9357
b) 0,6915

6. Calcula el valor de la probabilidad $P(12 < X < 22)$ siendo X una variable que se distribuye según una $N(17,\ 5)$.

$P(12 < X < 22) = P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$

7. Para la $N(0,\ 1)$ calcula el valor de k tal que:
a) $P(Z < k) = 0{,}8599$;
b) $P(Z < k) = 0{,}0287$

a) 1,08
b) −1,90

8. Las calificaciones, X, de un examen eliminatorio han resultado distribuirse como una normal $N(65,\ 18)$. Si la probabilidad $P(X < k) = 0{,}9192$ ¿Cuánto vale k?

$$P\left(Z \leq \frac{X_0 - 65}{18}\right) = 0{,}9192 \Rightarrow x_0 = 65 + 18 \cdot 1{,}4 = 90{,}2 \text{ puntos}$$

9. La distribución $N(50,\ 5)$ puede considerarse una buena aproximación de la distribución binomial $B(n,\ p)$. ¿Cuánto valen n y p?

Formamos el sistema:
$$\begin{cases} np = 50 \\ npq = 5^2 \end{cases} \Rightarrow q = 1/2 \Rightarrow p = 1/2$$

10. La probabilidad de fallar diana en un tirador profesional es de 0,2. Si realiza 100 disparos, ¿cuál es la probabilidad de que falle más de 25?

La binomial $B(100,\ 0{,}2)$ se aproxima por una $N(20,\ 4)$ y $P(X > 25) = P(X' > 24{,}5) = 0{,}0838$

Notas

Notas

Notas

Notas